1.2.1 Liliputanci

U *Gulliver-ovim putovanjima* Jonathan Swift-a, Lemuel Gulliver se upoznaje sa stanovnicima zemlje Lilliput, koji su potpuno istovetni ljudskim bićima, samo što su manji: njihova prosečna visina je 45 mm. Drugim rečima, Liliputanci su $\lambda = 40$ puta manji od običnih ljudi.

1. **Koliko tereta (u jedinicama svoje sopstvene težine) može Liliputanac da podigne?**
   (a) Težina tereta je odredjena silom koja je raspoloživa za podizanje tereta, a sila je proporcionalna površini poprečnog preseka mišića. Pošto je Liliputanac sazdan kao običan čovek, poprečni presek njegovog mišića je $\lambda^2 = 1\,600$ puta manji.
   (b) Težina samog Lilliputanca je $mg = \rho V g$, gde je g gravitaciona *konstanta*, ρ gustina koja je ista kao i kod običnih ljudi, a V je zapremina. Pošto je Liliputanac 40 puta manji, zapremina mu je $\lambda^3 = 64\,000$ puta manja od zapremine sličnog čoveka, pa je takodje i težina 64 000 puta manja.

   Proiziliazi da Liliputanac može da podigne 1/1 600-nu tereta koji običan čovek podigne, što je medjutim još uvek $\lambda^{-2}/\lambda^{-3} = \lambda = 40$ puta više—u jedinicama njegove sopstvene (64 000 puta manje) težine—nego običan čovek. *Proporcionalno*, Liliputanac je $\lambda = 40$ puta jači of običnog čoveka.

2. **Koliko brzo kuca srce Liliputanca?**
   Učestalost kojom srce pumpa krv je oderdjeno količinom krvi koju srce pomeri u jednom stisku i količinom krvi koja treba da cirkuliše u jedinici vremena. U toplokrvnim bićima, jedna od glavnih funkcija cirkulacije krvi je da održi temperaturu i život tkiva dostavom kiseonika. (Pri prestanku cirkulacije, tkivo odumire i hladi se.)
   (a) Zapremina Liliputanskog srca je $\lambda^3 = 64\,000$ puta manja od srca običnog čoveka. To je zapremina krvi koju srce u jednom otkucaju pumpa u optok.
   (b) Telo se hladi kroz površinu kože, koja je kod Liliputanca $\lambda^2 = 1\,600$ puta manja nego kod ovičnog čoveka.

   Proizilazi da Liliputansko srce bije $\lambda^{-2}/\lambda^{-3} = \lambda = 40$ puta brže od običnog ljudskog srca, da bi u svojim (λ^{-3} manjim od običnog čoveka) "jedinicama pumpanja" postiglo protok λ^{-2} puta manji od običnog čoveka. To je oko $40 \times 70 = 2\,800$ puta u minuti, ili 46,67 puta u sekundi. To je ton frekvencije 46, 67 Hz, vrlo blizu drugog $\sharp F$-tona s leva, na standardnom klaviru: srce Liliputanca bruji. Koža većine malih toplokrvnih životinja je pokrivena krznom, da smanji gubitak toplote, tako da srce ne bi moral tako brzo da kuca.

3. **Koliko visoko može Liliputanac da skoči?**
   Visina skoka je odredjena energijom koja je raspoloživa za podizanje tela: Energija E podigne telo mase m na visinu $h = E/mg$.
   (a) Masa Liliputanca $\lambda^3 = 64\,000$ puta manja od mase sličnog čoveka.
   (b) Energija raspoloživa za skok potiče iz rada uloženog silom F mišića koji su se stegli $\triangle L$: $E = W = F \triangle L$. Sila koju mišić može proizvesti je proporcionalna poprečnom preseku, koji je kod Liliputanca $\lambda^2 = 1\,600$ puta manji nego kod običnog čoveka. Promena dužine mišića je $\lambda = 40$ puta kraća, pa je dakle energija raspoloživa za skok $(\lambda^2)(\lambda) = 64\,000$ puta manja.

(c) Pošto su kod Liliputanca i energija i masa $\lambda^3 = 64\,000$ puta manji nego kod običnog čoveka, a gravitaciona konstanta *konstanta*, visina skoka je takodje konstanta: Liliputanac može skočiti jednako visoko kao i običan čovek. U jedinicama svoje sopstvene visine, medjutim, Liliputanac dakle može da skoči $\lambda = 40$ puta višlje nego običan čovek.

1.2.2 Larmor-ova formula

Larmor-ova formula za gubitak energije naelektrisanja q pri usporenju $\vec{a}$ putem elektromagnetne radijacije u jedinici vremena (dakle, snage) je:

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2\,a^2}{c^3}\ \text{(cgs)}, \qquad P = \frac{q^2\,a^2}{6\pi\epsilon_0\,c^3} = \frac{3}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2\,a^2}{c^3}\ \text{(SI)}. \tag{1.1}$$

Dimenziona analiza. Treba nam *snaga*—energija po jedinici vremena:

$$[P] = \frac{[\triangle E]}{[\triangle t]} = \frac{[\frac{1}{2}mv^2]}{T} = \frac{M\,L^2}{T^2\,T} = \frac{M\,L^2}{T^3}. \tag{1.2}$$

Energija koja se menja (opada) u procesu elektromagnetne radijacije je svakako elektromagnetnog porekla, a za elektrostatičnu energiju važi:

$$\frac{M\,L^2}{T^2} = [U_C] = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1\,q_2}{r}\right], \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\right] = \frac{M^{1/2}\,L^{3/2}}{T} \tag{1.3}$$

Snaga izgubljena elektromagnetnom radijacijom u toku ubrzanja (ili usporenja) mora da zavisi od ubrzanja, $\vec{a}$. Kako je to vektor, a snaga je skalar, snaga mora da zavisi of nekog stepena kvadrata ubrzanja, $(\vec{a}\cdot\vec{a})^\beta = |\vec{a}|^{2\beta} = a^{2\beta}$. Osim toga, snaga može još samo da zavisi od *univerzalne konstante*, c—i, naravno, naelektrisanja:

$$[q^\alpha\,a^{2\beta}\,c^\gamma] = \left(\frac{M\,L^3}{T^2}\right)^{\alpha/2}\left(\frac{L}{T^2}\right)^{2\beta}\left(\frac{L}{T}\right)^{\gamma} = \frac{M^{\alpha/2}\,L^{3\alpha/2+2\beta+\gamma}}{T^{\alpha+4\beta+\gamma}} \stackrel{!}{=} \frac{M\,L^2}{T^3}. \tag{1.4}$$

Poredjenjem sledi da:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\alpha &= 1, \\ \tfrac{3}{2}\alpha + 2\beta + \gamma &= 2, \\ \alpha + 4\beta + \gamma &= 3, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= 2, \\ \beta &= 2, \\ \gamma &= -3, \end{aligned}\right. \tag{1.5}$$

tako da

$$P \propto \frac{q^2\,a^2}{c^3}. \tag{1.6}$$

Numerički faktor, $\frac{3}{2}$, se ne da odrediti dimenzionom analizom, dok je prisustvo ili otsustvo faktora $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ordedjeno izborom jedinica—SI ili cgs.

1.2.3 Perturbacija stacionarnih stanja

Neka je zadat 1-dimenzioni (ne-relativsitčki) kvantni sistem sa zadatim Hamiltonijanom H_0, za koji je pretpostaviti da znamo stacionarna rešenja:

$$H_0\,|n\rangle = E_n^{(0)}\,|n\rangle\,, \qquad \mathcal{U}_0\,|n\rangle = e^{-i\omega_n t}\,|n\rangle\,, \qquad \omega_n := \frac{E_n^{(0)}}{\hbar}, \tag{1.7}$$

$$H_0\Psi_n(x,0) = E_n^{(0)}\Psi_n(x,0), \qquad \Psi_n(x,t) = e^{-i\omega_n t}\,\Psi_n(x,0). \tag{1.8}$$

Osim toga, koristeći Gram-Schmidt-ov postupak ortogonalizacije, za pretpostaviti je da smo već uredili prostor rešenja tako da je:

$$\mathscr{H} := \left\{\ |n\rangle\ :\ H_0\,|n\rangle = E_n^{(0)}\,|n\rangle\,,\ \langle n|m\rangle = \delta_{n,m},\ \sum_n |n\rangle\,\langle n| = \mathbb{1}\right\} \tag{1.9}$$

Hilbert-ov prostor rešenja datog sistema. Ovde notaciju treba uzeti simbolično: n stoji za bilo kakav sistem brojeva: jedan ili više, diskretni ili kontinualni, uključujući čak i hibridni skup kao što je to slučaj sa vodonikovim atomom, gde za negativne energije n predstavlja diskretne kvantne brojeve (n,ℓ,m,m_s) vezanih stanja, a za positivne energije, neki od tih brojeva (koji?) postanu kontinualni.

Neka je sada dati kvantni sistem perturbiran $H_0 \to H = H_0 + H'$, dodatkom *perturbacionog* Hamiltonijana H'. Za početak, neka je H' nezavisno od vremena, i neka je H'—kao operator!—*mali*. To će reći, uticaj promene $H_0 \to H$ na energije stacionarnih stanja te na sama stanja je, pretpostavljamo, mali. Preciznije, pretpostavljamo da su te promene analitičke (= mogu se razviti u Taylor-ov red). Onda važi da:

$$E_n^{(1)} = \langle n|H'|n\rangle; \tag{1.10}$$ E1

$$|n\rangle^{(1)} = -\sum\!\!\!\!\!\!\int_{m\neq n} \frac{\langle m|H'|n\rangle}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}\ |m\rangle\,; \tag{1.11}$$ ket1

$$E_n^{(2)} = -\sum\!\!\!\!\!\!\int_{m\neq n} \frac{\left|\langle m|H'|n\rangle\right|^2}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}; \qquad etc. \tag{1.12}$$ E2

Objašnjenje: Perturbacione popravke k-tog reda moraju da budu proporcionalne k-tom stepenu perturbacionog operatora H'—da nije njega, ne bi bilo popravki. $E_n^{(1)}$ je realna veličina koja može zavisiti samo od n-tog stanja, pa onda mora da bude očekivana vrednost operatora H' u n-tom stanju, kao u jednačini (1.10). Osim toga, kako god da smo normalizovali $|n\rangle$ is $\langle n|$, znamo da $\langle n|m\rangle$ mora da bude bez-dimenziono, pa se i dimenzije (jedinice mere) u izrazu (1.10) slažu. Prva popravka n-tog stanja ne može biti proporcionalna tom samom stanju, jer dodatak popravke datom stanju proizvelo $|n\rangle + \epsilon\,|n\rangle$, čija norma ne može biti 1, ako $\|\,|n\rangle\,\|^2 = 1$ i $\epsilon \neq 0$; otud "$m \neq n$" u sumi/integralu. Pošto $|m\rangle$ čine kompletan bazis (Sturm-Liouville-ova teorema za svojstvene probleme ermitskih operatora), $|n\rangle^{(1)}$ mora da može da se razvije u sumu po $|m\rangle$, kao u (1.11). poredjenjem leve i desne strane, koeficijenti u sumi moraju da budu proporcionalni nekom matričnom elementu operatora H'. Pošto je na levoj strani jednačine nalazi "ket-n," na desnoj strani takodje mora da se pojavi "ket-n" tako da bi linearna promena bazisa $|n\rangle$ delovala na obe strane jednako. Sledi da koeficijent u sumi na desnoj strani mora da zavisi linearno od $\langle m|H'|n\rangle$, i pošto taj matrični element ima dimenzije energije kao i H', moramo ga podeliti sa nekom energijom—otud $E_m^{(0)} - E_n^{(0)}$.

Dodatno, pretpostavimo da perturbacioni Hamiltonijan zavisi od vremena, $H' = H'(t)$. Tada je amplituda verovatnoće prelaza iz inicijanlog (i) u finalno ($f \neq i$) stanje

$$a_{fi}^{(1)}(T) = \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{T>t_0} \mathrm{d}\tau\ \left\langle f\middle|H'(\tau)\middle|i\right\rangle e^{i\omega_{fi}\tau}, \qquad \omega_{fi} := |E_f - E_i|/\hbar, \tag{1.13}$$

u prvom redu perturbacije.

1.2.4 Karakteristične veličine

Uzmimo, na primer, klatno dužine $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ i mase $m = 10\,\mathrm{g}$. Bez postavljanja i rešavanja jednačina kretanja, možemo proceniti frekvenciju pošto:

1. Frekvencija može da zavisi samo od fizičkih osobina klatna, (ℓ, m), i gravitacione konstante, g; zanemarimo disipativne sile.
2. Dimenzionom analizom:

$$[\ell] = L, \quad [m] = M, \quad [g] = \frac{L}{T^2}, \quad \text{a treba nam} \quad [\nu] = \frac{1}{T}; \tag{1.14}$$

$$\nu \propto \ell^\alpha\, m^\beta\, g^\gamma, \tag{1.15}$$

pa—ako je $\nu(\ell, m, g)$ analitička funkcija—sledi:

$$\frac{1}{T} = [\ell]^\alpha\, [m]^\beta\, [g]^\gamma = L^\alpha\, M^\beta \left(\frac{L}{T^2}\right)^\gamma = \frac{L^{\alpha+\gamma}\, M^\beta}{T^{2\gamma}} \tag{1.16}$$

to jest

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0, \\ \beta &= 0, \\ 2\gamma &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= -\tfrac{1}{2}, \\ \beta &= 0, \\ \gamma &= \tfrac{1}{2}, \end{aligned}\right. \tag{1.17}$$

i, odatle

$$\nu \propto \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \tag{1.18}$$

Do na numerički faktor, kao 2π—što zavisi od definicije "frekvencije", to je precizna formula.

1.2.5 Oprez!

Uzmimo, slično, vodonikov atom. Energija vodonikovog atoma mora da zavisi od (redukovane) mase elektrona, m_e, naelektrisanja elektrona, $-e$, i jezgra, $+Ze$. Coulomb-ova sila, koja "drži" atom zajedno, je proporcionalna proizvodu

$$(-e)\,(Ze), \quad \text{gde znamo} \quad [Ze^2] = \frac{M\,L^3}{T^2}. \tag{1.19}$$

Očigledno je da ne postoji proizvod $m^\alpha (Ze^2)^\beta$ koji bi imao dimenzije energije: za to nam treba bar još jedna karakteristična veličina, čije su dimenzije različite od $[m_e]$ i $[Ze^2]$.

Bohr-ov postulat uvodi takvu jednu novu veličinu: $\hbar$. Njene dimenzije su $[\hbar] = \frac{ML^2}{T}$—budući je to, po Bohr-u, jedinica ugaonog momenta. Iz toga bi sledilo:

$$[E_H] = \frac{M\,L^2}{T^2} = [m_e^\alpha][(Ze^2)^\beta][\hbar^\gamma] = M^\alpha \left(\frac{M\,L^3}{T^2}\right)^\beta \left(\frac{M\,L^2}{T}\right)^\gamma = \frac{M^{\alpha+\beta+\gamma}\, L^{3\beta+2\gamma}}{T^{2\beta+\gamma}} \tag{1.20}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ 3\beta + 2\gamma &= 2, \\ 2\beta + \gamma &= 2, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= 2, \\ \gamma &= -2, \end{aligned}\right. \tag{1.21}$$

odnosno:

$$E_H \propto \frac{m_e\,(Ze^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2}, \tag{1.22}$$

EH

što daje korektnu zavisnost od karakterističnih konstanti: m_e, Z, e^2 i $\hbar$.

Od dosada zadatih veličina, $m_e, (Ze^2), \hbar$, to je jedina "jednostavna" formula sa korektnim dimenzijama. Osim toga, od te tri veličine nije moguće napraviti kombinaciju bez dimenzije:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \ \ \beta + \ \ \gamma &= 0, \\ 3\beta + 2\gamma &= 0, \\ 2\beta + \ \ \gamma &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ \beta &= 0, \\ \gamma &= 0, \end{aligned}\right. \tag{1.23}$$

tako da nije moguće modifikovati formulu (1.22) nekim stepenom (ili čak proizvoljnom funkcijom) bez-dimenzione konstante. Pošto znamo da jednostavna fomula tipa (1.22) ne daje kompletan opis (postoji tzv. fino cepanje nivoa i Lamb-ov pomak, koji su nekoliko reda veličine manji od E_H), znači da energija vodonikovog atoma *mora da zavisi* od još jedne karakteristične fizičke veličine!

I stvarno (sa $Z = 1$),

$$E_n = -2\alpha^2\,(m_e c^2)\,\frac{1}{(2n)^2}, \qquad \alpha = \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)\hbar c} = \frac{1}{137.036}. \tag{1.24}$$

eEn

Prava formula za energiju vodonikovog atoma zavisi i od brzine svetlosti[1], c, pa stoga postoji i bez-dimenziona konstanta α. Stoga, dimenziona analiza može da predvidi samo

$$E_n \propto f(\alpha)\,(m_e c^2), \tag{1.25}$$

bez ikakve informacije o *proizvoljnoj* funkciji $f(\alpha)$.

Prva formula (1.22) se može napisati sada kao:

$$E_H = Z^2\,\alpha^2\,m_e c^2 \tag{1.26}$$

što je, zapravo, korektnog reda veličine i slaže se sa (1.24) do na numerički koeficijent $-\frac{2}{(2n)^2}$. Ako pokušamo da nadjemo "ne-kvantnu" formulu, tražimo rešenje za:

$$[E_C] = \frac{M\,L^2}{T^2} = [m_e^\alpha][(Ze^2)^\beta][c^\gamma] = M^\alpha\left(\frac{M\,L^3}{T^2}\right)^\beta\left(\frac{L}{T}\right)^\gamma = \frac{M^{\alpha+\beta}\,L^{3\beta+\gamma}}{T^{2\beta+\gamma}} \tag{1.27}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \ \ \beta \qquad &= 1, \\ 3\beta + \gamma &= 2, \\ 2\beta + \gamma &= 2, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= 0, \\ \gamma &= 2, \end{aligned}\right. \tag{1.28}$$

odnosno:

$$E_C \propto m_e c^2, \tag{1.29}$$

EC

što je, naravno, netačno: $E_C = 0.5\,\text{MeV} \gg |E_1| = 13.6\,\text{eV}$. Osim toga, E_C ne zavisi od naelektrisanja, što je besmisleno za vezivnu energiju vodonikovog atoma: da nema naelektrisanja, ne bi ni (vezanog) vodonikov-og atoma bilo.

[1] Vodonikov atom *jeste* relativistički problem, jer se Coulmb-ovo polje stalno prilagodjava—brzinom svetlosti—kretanju elektrona i protona.

Osim toga znamo da korekcija "fine strukture" zavisi od relativističke korekcije kinetičke energije i spin-orbitne interakcije—što ne uvodi ni jednu novu fizičku veličinu u formulu:

$$\triangle E_{\rm fs} = -\alpha^4\,(m_e c^2)\,\frac{1}{(2n)^2}\Big(\tfrac{2n}{j+\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}\Big), \qquad j := \ell \pm \tfrac{1}{2} \text{ degeneracija.} \tag{1.30}$$

Pošto je "sopstvena" energija elektrona $m_e c^2$, izgleda kao da poredak

$$|m_e c^2| \;:\; |E_n| \;:\; |\triangle E_{\rm fs}| \quad = \quad \alpha^0 \;:\; \alpha^2 \;:\; \alpha^4 \tag{1.31}$$

predvidja da je—do na numeričke koeficijente kao $\frac{1}{n^2}$—energija vodonikovog atoma u stvari analitička funkcija formalne promenljive "α^2" a ne α:

$$E_n(\alpha) = m_e c^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,\alpha^{2k}, \tag{1.32}$$

$$C_0 = 1, \quad C_1 = -\tfrac{1}{2n^2}, \quad C_2 = -\tfrac{1}{4n^2}\Big(\tfrac{2n}{j+\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}\Big), \quad \textit{itd.} \tag{1.33}$$

Medjutim, ni to nije *sasvim* tačno:

$$\triangle E_{\rm Lamb} = \alpha^5\,(m_e c^2)\,\frac{1}{(2n)^2}\frac{1}{n}\Big(E_L(n,\ell) \pm \frac{1}{\pi(j+\frac{1}{2})(\ell+\frac{1}{2})}\Big), \tag{1.34}$$

gde je $|E_L(n,\ell)| < 0.05$. Najzad, postoji i "hiper-fina" struktura, koja zavisi i od mase protona, m_p, kroz magnetni momenat:

$$\vec{\mu}_p := \gamma_p \frac{e}{m_p c}\vec{S}_p \quad \text{u poredjenju sa} \quad \vec{\mu}_e := \frac{e}{m_e c}\vec{S}_e; \quad \gamma_p = 2.7928. \tag{1.35}$$ eMu

Količnik $(m_e/m_p) \approx 1/2\,000$ je nova bez-dimenziona constanta, čime se formula za energiju znatno komplikuje:

$$\triangle E_{\rm hfs} = \Big(\frac{m_e}{m_p}\Big)\,\alpha^4\,(m_e c^2)\,\frac{4\gamma_p}{2n^3}\frac{\pm 1}{(f+\frac{1}{2})(\ell+\frac{1}{2})}, \tag{1.36}$$

gde je $f(f+1)\hbar^2$ svojstvena vrednost operatora $(\vec{L} + \vec{S}_e + \vec{S}_p)^2$.

1.3 Kvantna priroda Prirode i granice informacije

Priroda je i kvantna i relativistička; konstante $\hbar$ i c su *univerzalne*. Osim toga, Newton-ov zakon gravitacije—proširen(!) Einstein-ovom teorijom relativnosti—je takodje univerzalan, pa je tako i Newton-ova konstanta, G_N, univerzalna. Njene jedinice su:

$$F_G = G_N\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad [G_N] = \frac{[F_G][r^2]}{[m^2]} = \frac{M\,L\,L^2}{T^2\,M^2} = \frac{L^3}{T^2\,M} \tag{1.37}$$

Iz toga imamo Planck-ove ili *prirodne* jedinice:

Ime		**Izraz**	**SI ekv.**	
Dužina	ℓ_P	$= \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}}$	$1.616252(81)\times 10^{-35}$ m	
Masa	m_P	$= \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}}$	$2.17644(11)\times 10^{-8}$ kg	$1.220862(61)\times 10^{19}$ GeV/c^2
Vreme	t_P	$= \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}}$	$5.39124(27)\times 10^{-44}$ s	
Naelektrisanje	q_P	$= \sqrt{4\pi\epsilon_0\,G_N}$	$1.875545870(47)\times 10^{-8}$ C	$11.7062376398(40)\,e$
Temperatura	T_P	$= \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N\,k_B^2}}$	$1.416785(71)\times 10^{32}$ K	

U teoriji elementarnih čestica se češće koristi

$$\sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G_N}} = 2.43\times 10^{18}\,\mathrm{GeV/c^2} \;=\; 4.340\,\mu\mathrm{g}. \tag{1.38}$$

1.3.1 Granica informacije

Schwarzschild-ov radijus:

$$r_S = \frac{2\,G_N\,m}{c^2} \tag{1.39}$$

Compton-ova talasna dužina

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} \tag{1.40}$$

Stoga

$$r_S \sim \lambda_C \quad \Rightarrow \quad \frac{2\,G_N\,m_*}{c^2} \sim \frac{h}{m_* c} \tag{1.41}$$

$$\Rightarrow \quad m_* \sim \sqrt{\pi}\,m_P \tag{1.42}$$

nameće *gornju* granicu energije $E \leq m_* c^2$ ispitivanja (sub)strukture. Onda Heisenberg-ove relacije neodredjenosti nameću

$$\triangle x \;\geq\; \tfrac{1}{2}\frac{\hbar}{\triangle p_x} \;\geq\; \tfrac{1}{2}\frac{\hbar}{m\,c} \;\geq\; \tfrac{1}{2}\frac{\hbar}{m_*\,c} \tag{1.43}$$

kao *donju* granicu razmaka (dakle rezolucije) izmedju dva razlučiva dela celine.

Dakle—gde god Priroda zadrži svoju sada poznatu kvantnu i relativističku prirodu—postoji minimalni razmak razlučivosti ($\sim \ell_P \sim 10^{-35}$ m) i maksimalna energija ($\sim m_P c^2 \sim 10^{19}$ GeV) pri kojoj se ta maksimalna rezolucija može postići.

Dakle, postoji *fundamentalna fizika*: *fundamentalni procesi* izmedju *elementarnih "čestica"*.

1.3.2 Pomak u poimanju

Relativnost Prirode nam brani shvatanje prostora i vremena kao dve raznorodne "stvari," i primorava nas da ih spojimo u jedno, jedinstveno prostor-vreme. Tu je pojam simultanosti relativan i raspršuje tzv. paradokse blizanaca, merdevina i štale, lenjira i rupe na stolu...

Kvantnost Prirode nam brani da shvatamo "stvari" oko nas kao nepromenljive, od okoline jasno odvojene objekte, i primorava nas da ih razmatramo u skladu sa nametnutim uslovima. Tako elektron može da se ponaša i kao tačkasta čestica, i kao talas—a nije ni jedno ni drugo, već "nešto" što pod odgovarajućim uslovima *može da izgleda* kao čestica ili kao talas. Slično tome, umesto da govorimo o spletenim stanjima (*entangled states*) dva različita objekta u eksperimentima EPR tipa, bilo bi bolje da govorimo o jednom, jedinstvenom stanju koje pod odredjenim uslovima može da se shvati kao dva prostorno razdvojena objekta.

Osim toga, kvantnost Prirode ukazuje na važnost Hilbert-ovog prostora kao vrlo realnog prostora u kome se procesi dogadjaju—uprkos tome da niko nije u stanju da "vidi" ni Hilbert-ov prostor a ni dogadjaje u njemu. Za razliku od toga, mada mi sami prostor(-vreme) ne vidimo,

mi vidimo dogadjaje u prostoru(-vremenu). Stoga je intuitivno lakše misliti o dogadjajima u prostor(-vremenu), a misliti o dogadjajima kako se odvijaju u Hilbert-ovom prostoru se čini mnogo manje prirodnim, i vrlo neintuitivnim. Stoga je proroda kvantne Prirode začudjujuća.

Kombinacija (specijalno-)relativističke i kvantne fizike je onda "dvostruko začudjujuća" i neintuitivna, ali nije ništa manje stroga kao naučna disciplina od dobro poznate i veoma intuitivne klasične mehanike. Zapravo, najpreciznije slaganje izmedju teorijske i eksperimentalne fizike je upravo u području kvantne teorije polja: poredjenjem raznih merenja i teorijskih proračuna, kvantna elektrodinamika se potpuno slaže sa ekspermentalnim podatcima[2], za neke od karakterističnih veličina, kao α, čak do na 10^{-12}

Fundamentalna fizika i njen opis Prirode—koja moraju da sadrže i kvantnu fiziku i opštu relativnost—su onda još začudniji.

Klasični se fizičari ne pomire sa kvantnom fizikom.
Ona ih preživi.
— M. Planck

Preporučene vežbe

1. Proceniti vreme kolapsa vodonikovog atoma usled zakočnog zračenja elektrona, koristeći Larmor-ovu formulu za procenu gubitka energije zračenjem. Atom možemo smatrati da je kolapsirao kada elektron "padne" u jezgro, dakle, kada se radijus elektrona smanji od oko 10^{-10} m do oko 10^{-15} m.
2. Prilagoditi formule za energije vezanih stanja u vodonikovom atomu za tzv. muonski vodonik—vezano stanje μ^- leptona i protona; $m_\mu/m_e \approx 206$. Krenuti od nerelativističkog Hamilton-ijana sa Coulomb-ovim poljem, zatim "popraviti" taj Hamilton-ijan dodavanjem: (**1**) prve relativističke popravke za kinetički deo Hamilton-ijana, te (**2**) tzv. "spin-orbitnu" interakciju, proporcijalnu skalarom proizvodu sopstvenog magnetnog dipolnog momenta μ^- leptona [v. (1.35)] sa magnetnim poljem koje naelektrisani lepton stvara kruženjem oko jezgra. Izračunati popravke teorijom perturbacija, do na prvi red.
3. Prilagoditi formule za energije vezanih stanja u vodonikovom i μ^--leptonskom atomu za tzv. pozitronijum—vezano stanje elektrona i pozitrona. Formalno, sada jezgro i orbitujuća čestica imaju istu masu: $m_{e^-} = m_{e^+}$.

[2] Videti ⟨http://en.wikipedia.org/wiki/Precision_tests_of_QED⟩.