

# (Fundamentalna) Fizika Elementarnih Čestica

Dan 08c: Kosmologija

Tristan Hübsch

*Department of Physics and Astronomy, Howard University, Washington DC*

*Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD*

*Department of Physics, Faculty of Natural Sciences, Novi Sad, Serbia*

<https://tristan.nfshost.com/>

# Fundamentalna Fizika Elementarnih čestica

## Program

- Kosmološka rešenja i putovanje kroz vreme
- Standardne geometrije u kosmologiji
- Kosmološka konstanta i mrak
- Nestandardne kosmologije:  
Kasner, Gödel...
- Inžinjering prostor-vremena i crvotočine
- Aditivnost materije, ali ne i prostor-vremena
- Energetski uslovi
- Einstein-Rosen most
- Šta zadaje koordinatni domen
- Hirurgija prostor-vremena
- Prohodne crvotočine

SUTRA  
posle pauze:

— Zoom-foto —

# Kosmološka rešenja i putovanje kroz vreme

## Standardne geometrije u kosmologiji

- Alexander Friedman, Georges H.J.E. Lemaître, Howard P. Robertson i Arthur G. Walker (FLRW):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\Sigma^2, \quad \begin{cases} d\Sigma^2 := \left[ \frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \\ d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2 \end{cases}$$

- ... $a(t)$  je funkcija srazmere,  $K$  je Gauss-ova krivina kad  $a(t) = 1$ .
- Ove  $(t, r, \theta, \varphi)$  koordinate pokrivaju samo pola prostor-vremena
- Pa koristimo tzv. “hipersferne” koordinate:

$$d\Sigma^2 = dr^2 + S_K^2(r) d\Omega^2, \quad S_K(r) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(r\sqrt{K}) & K > 0, \\ r & K = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(r\sqrt{|K|}) & K < 0. \end{cases}$$

# Kosmološka rešenja i putovanje kroz vreme

## Kosmološka konstanta i tamne stvari

- “Standardna forma” Einstein-ovih jednačina

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu},$$

- nije ono što je Einstein izvorno objavio:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda$$

- ...gde je  $\Lambda$  kosmološka konstanta.

- Motivacija:

- mogućnost dodavanja Einstein-Hilbert-ovom dejstvu

- ...a  $\Lambda$  dozvoljava *stacionarnu* ravnu geometriju

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G_N}{3} \varrho,$$

$$\int \sqrt{-g} d^4x \Lambda$$

$$\varrho \rightarrow \varrho - \frac{\Lambda c^2}{8\pi G_N}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{c^2} = -\frac{8\pi G_N}{c^2} p,$$

$$p \rightarrow p + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G_N}$$

# Kosmološka rešenja i putovanje kroz vreme

## Kosmološka konstanta i tamne stvari

- Stoga je svaka (materijalna raspodela sa  $p = -\rho c^2) \simeq \Lambda$ .
- U opštem slučaju (za izotropnu i homogenu materiju)
  - **Tamna energija:** bilo šta, što ima  $p/\rho < 0$ .
  - **Kvintesencija:** bilo šta, što ima  $p/\rho < -c^2/3$ .
  - **Kosmološka konstanta:** bilo šta, što ima  $p/\rho = -c^2$ .
  - **Fantomská energija:** bilo šta, što ima  $p/\rho < -c^2$ .
- Od posebnog interesa:

Mi smo ovde.

$$ds^2 = \begin{cases} -c^2 dt^2 + a_0^2 e^{+2c\sqrt{\Lambda/3}t} d\vec{r}^2, & \text{de Sitter;} \\ -c^2 dt^2 + d\vec{r}^2, & \text{Minkovski;} \\ -c^2 dt^2 + \left[ \frac{12r_H^2/|\Lambda|}{(r_H^2 - r^2)^2} \sin^2(\sqrt{c^2|\Lambda|/3}(t-t_0)) \right] d\vec{r}^2, & \text{anti de Sitter.} \end{cases}$$

$$ds^2 = -c^2 (1 \mp \frac{1}{3}\Lambda\rho^2) d\tau^2 + (1 \mp \frac{1}{3}\Lambda\rho^2)^{-1} d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$$

$H := 2\sqrt{\Lambda/3} > 0$  je Hubble-ova konstanta.

# Kosmološka rešenja i putovanje kroz vreme

## Nestandardne geometrije u kosmologiji

- 1921, Edward Kasner (bez potpore materije):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{t}{T_i}\right)^{2p_i} (dx^i)^2,$$

- gde je

$$\sum_{i=1}^3 p_i = 1 = \sum_{i=1}^3 (p_i)^2.$$

- Ako bilo koja dva  $p_i$  iščezavaju, **ceo Riemann-ov tenzor je nula** — a prostor-vreme ipak nije **ni ravno ni izotropno**.

$$p_2^\pm = \frac{1}{2} \left( 1 - p_1 \pm \sqrt{1 + 2p_1 - 3p_1^2} \right),$$

$$p_3^\pm = 1 - p_1 - \frac{1}{2} \left( 1 - p_1 \pm \sqrt{1 + 2p_1 - 3p_1^2} \right),$$

- pa  $-\frac{1}{3} \leq p_i \leq 1$ : permutacije  $(0,0,1) \dots (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .

- Prostor-vremenska “zapremina” raste linearno sa koordinatom vremena:

$$\sqrt{-g} = ct / (T_1^{p_1} T_2^{p_2} T_3^{p_3})$$

# Kosmološka rešenja i putovanje kroz vreme

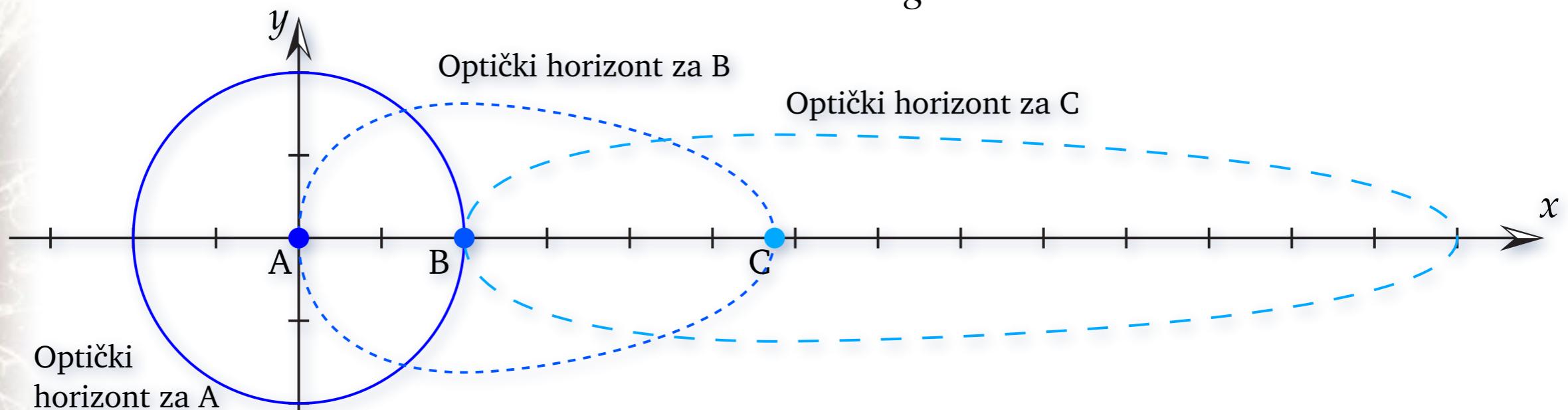
## Nestandardne geometrije u kosmologiji

- 1949, Kurt Gödel:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \left(\frac{r}{r_g}\right)^2} + r^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_g}\right)^2\right] d\phi^2 + dz^2 - c \frac{2\sqrt{2} r^2}{r_g} dt d\phi,$$

- Cilindrične koordinate  $(t, r, \phi, z)$  ko-rotiraju:  $\Omega_g := \frac{\sqrt{2}c}{r_g}$

- Svetlost sledi eliptične putanje, do  $r_g$ , pa se onda vrati nazad.



- Masivne mirujuće čestice se kreću samo u vremenu.

# Kosmološka rešenja i putovanje kroz vreme

## Nestandardne geometrije u kosmologiji

- Izometrije Gödel-ove metrike:

$$X_0 := \frac{1}{\Omega_g} \partial_t, \quad X_3 := \partial_z, \quad \text{i} \quad X_2 := \partial_\phi$$

- I, sasvim ne-očigledno:

$$X_{1,4} := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_g}\right)^2}} \left[ \frac{r}{\sqrt{2}c} \cos \phi \partial_t \pm \frac{r_g}{2} \left[ 1 + \left(\frac{r}{r_g}\right)^2 \right] \left\{ \begin{array}{l} \sin \phi \\ \cos \phi \end{array} \right\} \partial_r \right. \\ \left. + \frac{r_g}{2r} \left[ 1 + 2\left(\frac{r}{r_g}\right)^2 \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos \phi \\ \sin \phi \end{array} \right\} \partial_z \right]$$

- a pogotovo da:

$$\begin{aligned} L_1 &:= X_4, \quad L_2 := X_1, & \left[ \begin{array}{l} L_j, L_k \end{array} \right] &= i\varepsilon_{jk}^\ell L_\ell, \\ L_3 &:= -i(X_0 + X_2), & \left[ \begin{array}{l} L_j, X_0 \end{array} \right] &= 0 = \left[ \begin{array}{l} L_j, X_3 \end{array} \right], \end{aligned}$$

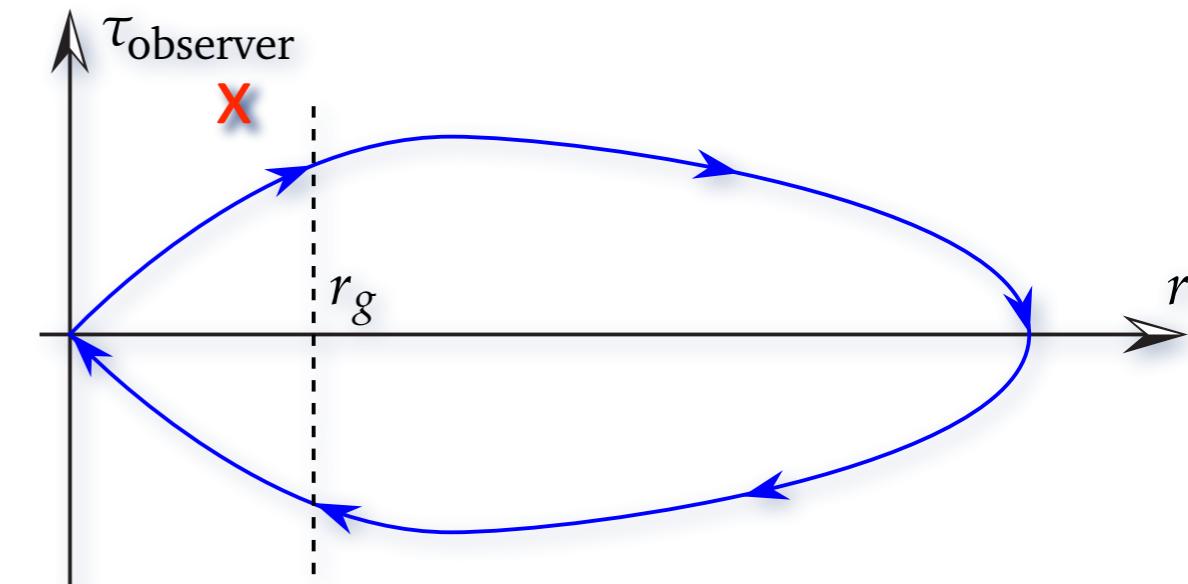
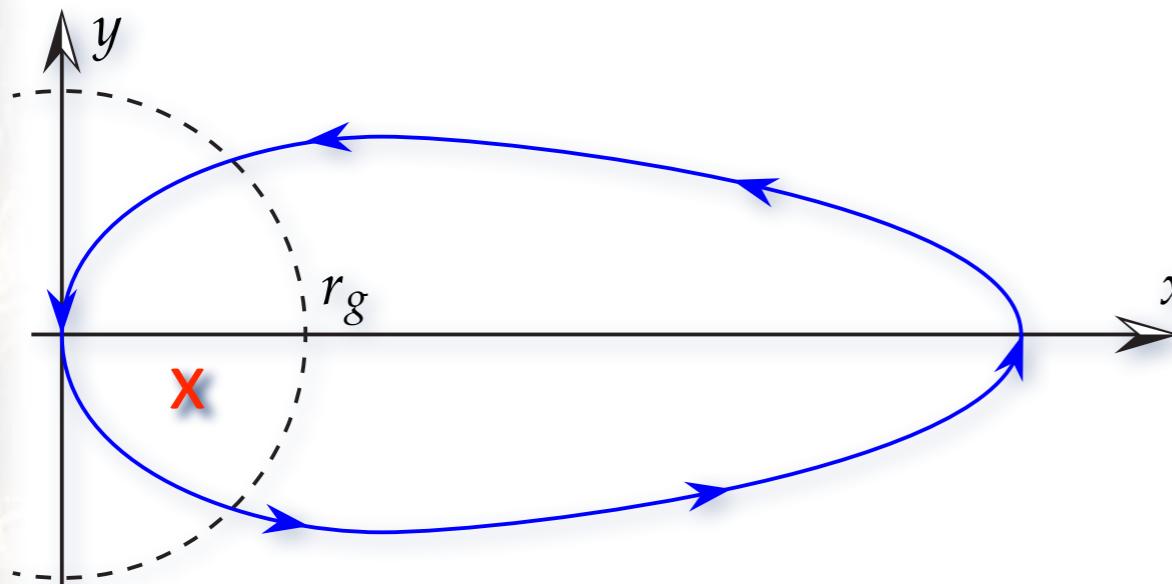
- generišu  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{tr}(\mathbb{R}^{1,1})$  algebru — 3D rotacije, i  $(t, z)$ -boost.

- Deluje “*tranzitivno*”: naći geodezijske putanje koje sadrže ishodište  
...pa transformisati ishodište u bilo koju drugu tačku.

# Kosmološka rešenja i putovanje kroz vreme

## Nestandardne geometrije u kosmologiji

- Gödel-ov Svemir je geodezijski kompletan, a nema singulariteta
- ...i ima neobično mnogo izometrija:  $\mathfrak{so}(3) \oplus \text{tr}(\mathbb{R}^{1,1})$ .
- Putovanje u vremenu:



- ali se mora krenuti:
  - iz  $r_{ini} < 1.7 r_g$
  - i za  $v_{ini} > 0.98c$

...ili bilo kojim početnim uslovom koji se dobije iz ovog,  $\mathfrak{so}(3) \oplus \text{tr}(\mathbb{R}^{1,1})$  izometrijom.

# Kosmološka rešenja i putovanje kroz vreme

## Nestandardne geometrije u kosmologiji

- Einstein-ov tenzor:

$$\begin{aligned}[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R] &= T_{\mu\nu} \\ &= \Omega_g^2 \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1) + 2\Omega_g^2 \operatorname{diag}(1, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

- Prvi deo: “lambda vakum” = rešenje sa  $\Lambda$ .
- Drugi deo: ko-rotirajući savršen fluid/pršina.
- Primetiti: tenzori energije impulsa su aditivni
- ...ako materijalna raspodela može fizički da se ko-locira

Einstein-ovi tenzori i tezori gustine energije-impulsa raspodela materije/energije su aditivni; njima odgovarajuće metrike nisu.

# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

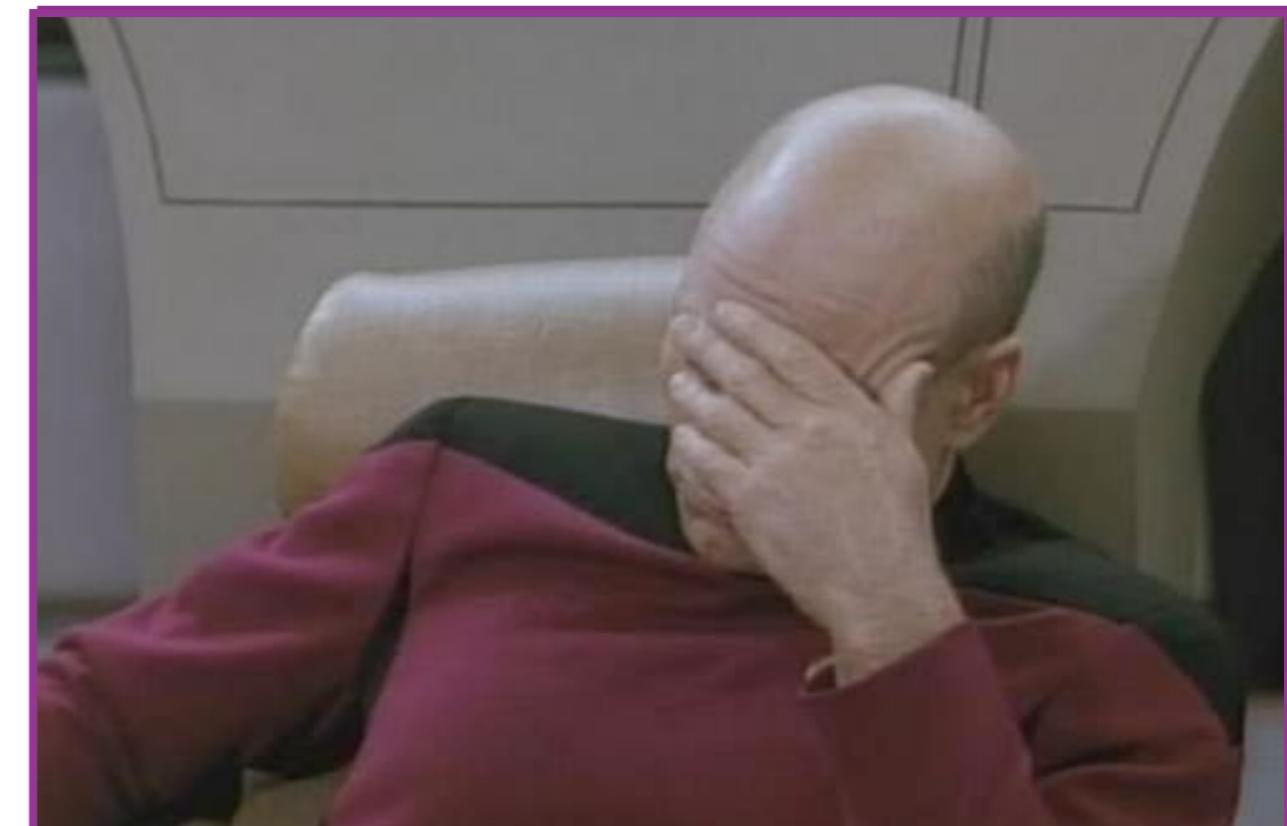
## Putovanje kroz vreme

- Ukratko: vremeplov je savršeno moguć u opštoj relativnosti.
- Zatvorene vremenske krive (ZVK  $\leftarrow$  CRC “closed timeline curves”)
  - U Gödel-ovom Svemiru, veliki stepen simetrije omogućuje dokaz da ipak nema narušenja/kršenja kauzalnosti.
  - Putovanje kroz ergoregion Kerr-ove geometrije, ili njen prstenast singularitet, ili mnoge druge konstrukcije...
  - ...su semi-klasični: narušenje kauzalnosti je *verovatno* sprečeno.
- 1992, Stephen Hawking (hipoteza):  
“opšti princip zaštite hronologije”
- 1975, Igor Novikov: jedino samo-konzistentne ZVK su moguće.
- Set narušenja hronologije (SNH?) = tačke kroz koje ZVK prolaze
- Granica SNH je Cauchy-ev horizont, isписан zatvorenim nul-geodezijskim krivama (kojima svetlost putuje).

# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Recept

- Koristi Einstein-ove jedančine kao da su Gauss-Ampère-ove:
- Zadaj geometriju, tj.  $\{(\tau, \xi, \eta, \zeta), g_{\mu\nu}\}$
- Izračunaj Einstein-ov tenzor  $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}$
- Identifikuj tenzor gustine energije-impulsa ...
  - ...kao sumu komponenti materije/energije.
  - Koje su fizičke karakteristike tog rasporeda materje/energije?
  - Može li se ta materija/energija sastaviti iz znanih tipova/formi materije/energije?
    - ...ili ona zateva *egzotičnu* materiju/energiju?
  - Izvrši! ("*Make it so!*")



# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Energetski uslovi

- Za pomoć toj karakterizaciji, definišemo:

**vremensko** 4-vektorsko polje sa komponentama  $\zeta^\mu(x)$

za koje važi  $g_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu < 0, \forall x$

**svetlosno** odnosno nul-4-vektorsko polje sa komponentama  $k^\mu(x)$

za koje važi  $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0, \forall x$

**kauzalno** 4-vektorsko polje sa komponentama  $\zeta^\mu(x)$

za koje važi  $g_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu \leq 0, \forall x$

	<b>Uslov</b>	<b>za svako</b>
<b>Dominantni</b>	$g^{\mu\nu}T_{\mu\rho}T_{\nu\sigma}\zeta^\rho\zeta^\sigma \leq 0$ i $g^{0\mu}T_{\mu\nu}\zeta^\nu < 0$	$g_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu \leq 0, (\zeta^0 > 0)$
<b>Slabi</b>	$T_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu \leq 0$	$g_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu < 0$
<b>Svetlosni (Nul)</b>	$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \leq 0$	$g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$
<b>Jaki</b>	$[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T]\zeta^\mu\zeta^\nu \leq 0$	$g_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu < 0$

**Dominantni**  $\Rightarrow$  **Slabi**  $\Rightarrow$  **Svetlosni (Nul)**  $\Leftarrow$  **Jaki**

# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Einstein-Rosen most

- Schwarzschild-ovo rešenje:

$$ds^2 = -f_s(r) \textcolor{green}{c^2} dt^2 + \frac{1}{f_s(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2),$$

$$f_s(r) := \left(1 - \frac{r_s}{r}\right), \quad r_s = \frac{2G_N M}{\textcolor{green}{c^2}}.$$

- @  $r = r_s$ ,

1. vremenski element,  $g_{00} = g_{tt} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \textcolor{green}{c^2}$  iščezava,

2. radijalni element,  $g_{rr} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}$  divergira.

- Za  $r < r_s$ ,

$$f_s(r) < 0 \quad \text{pa je} \quad g_{tt} = -f_s(r) > 0 \quad \text{a} \quad g_{rr} = (f_s(r))^{-1} < 0.$$

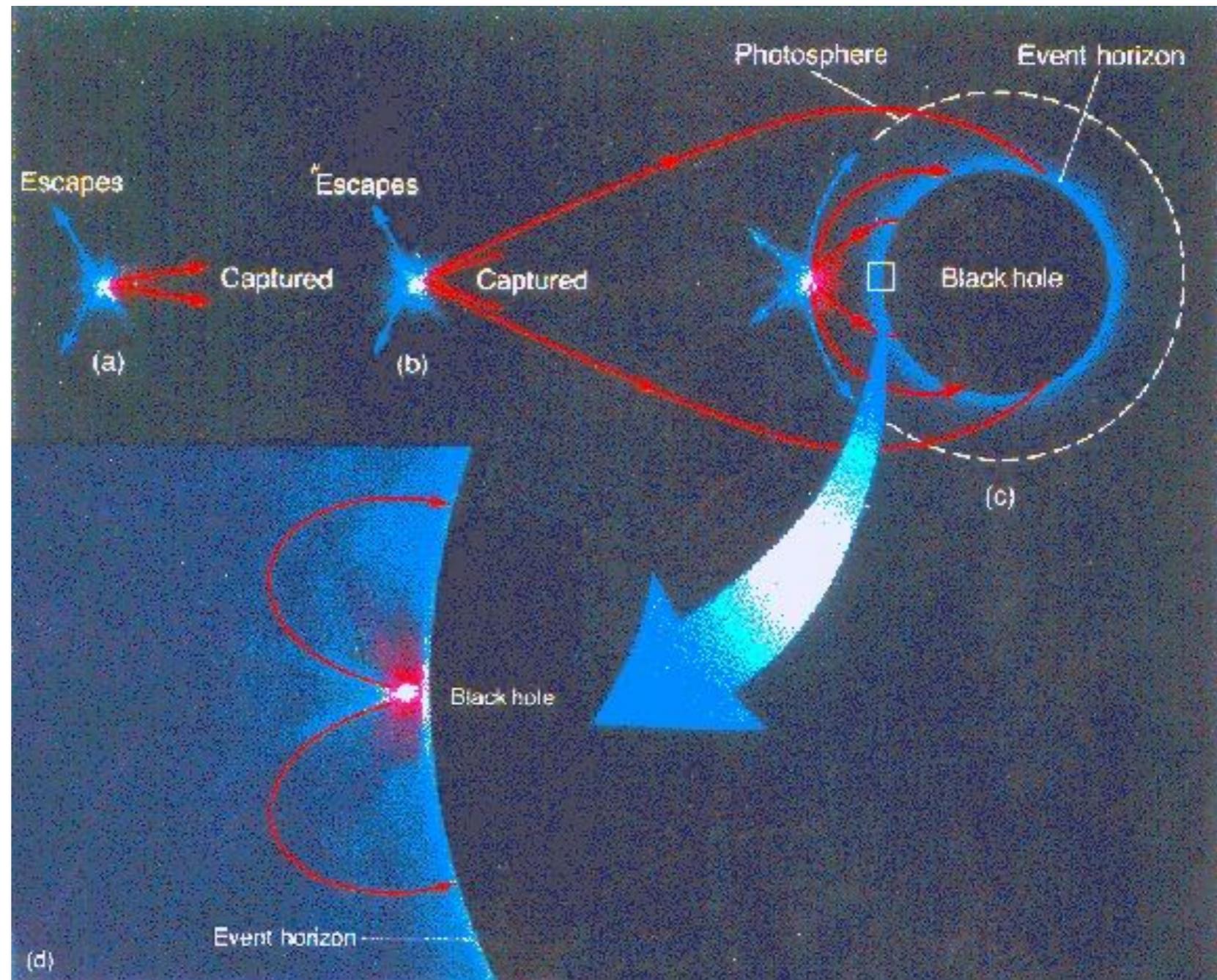
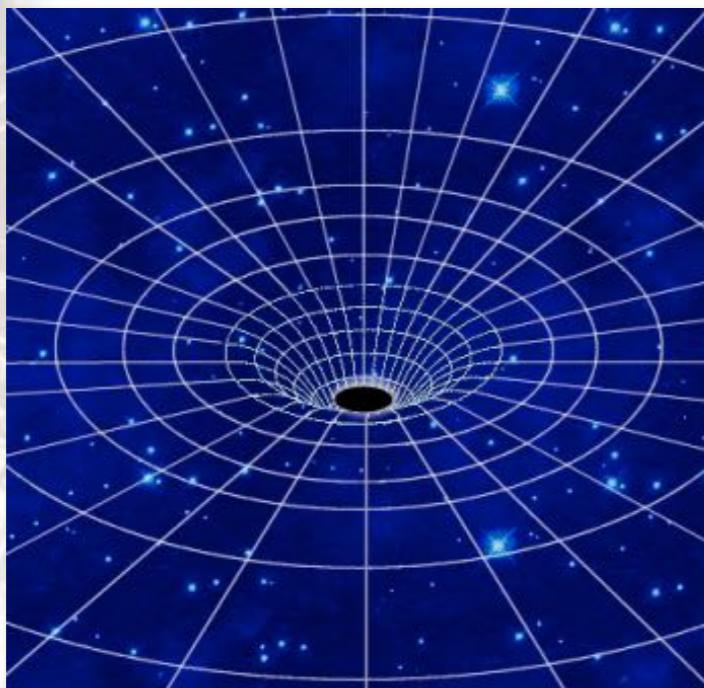
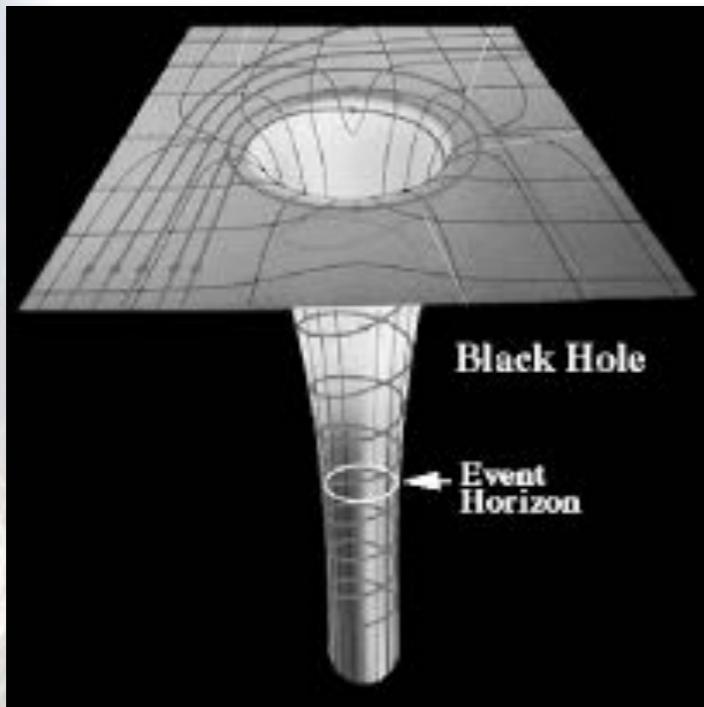
- Sa gledišta spoljašnjeg posmatrača,

- svo radijalno kretanje uspori do zaustavljanja blizu horizonta
- upadajućim objektima treba beskonačno dugo do horizonta
- izlazeće svetlo trpi crveni pomak do  $\lambda \rightarrow \infty$ .

# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Einstein-Rosen most

- Nekoliko slikovitih prikaza Schwarzschild-ovog rešenja:



# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Einstein-Rosen most

- Schwarzschild-ovo rešenje, u Kruskal-Szekeres koordinatama:

K-Sz	Schwarzschild
$u_{I,} - u_{III}$	$\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1} e^{r/r_S} \cosh\left(\frac{ct}{2r_S}\right)$
$v_{I,} - v_{III}$	$\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1} e^{r/r_S} \sinh\left(\frac{ct}{2r_S}\right)$

K-Sz	Schwarzschild
$u_{II,} - u_{IV}$	$\sqrt{1 - \frac{r}{r_S}} e^{r/r_S} \sinh\left(\frac{ct}{2r_S}\right)$
$v_{II,} - v_{IV}$	$\sqrt{1 - \frac{r}{r_S}} e^{r/r_S} \cosh\left(\frac{ct}{2r_S}\right)$

$$\left(\frac{r}{r_S} - 1\right) e^{r/r_S} = u^2 - v^2,$$

$$t = \begin{cases} \frac{2r_S}{c} \operatorname{arth}\left(\frac{v}{u}\right) & \text{u oblastima I i III;} \\ \frac{2r_S}{c} \operatorname{arth}\left(\frac{u}{v}\right) & \text{u oblastima II i IV;} \end{cases}$$

1950. je J.L. Synge otkrio nekompletnost, kao i jedan kompletan sistem koordinata.

1959. je C. Fronsdal (ponovo) otkrio nekompletost, kao i jedan opis sa algeb. uslovom.

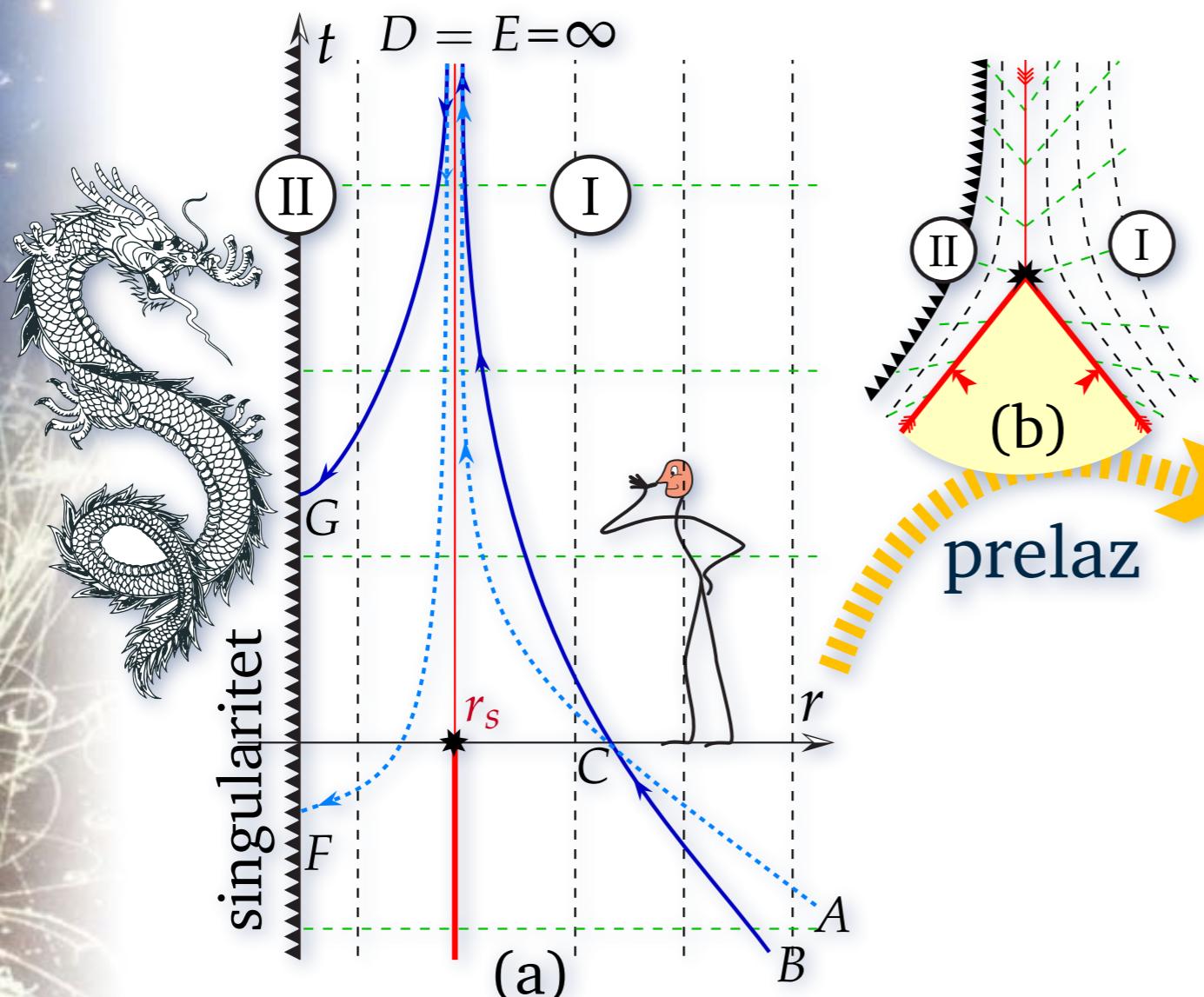
Fronsdal-ovo rešenje je slično M. Kruskal-ovom (posredstvom Wheeler-a i Finkelstein-a)

1960 je G. Szekeres nezavisno otkrio isto rešenje.

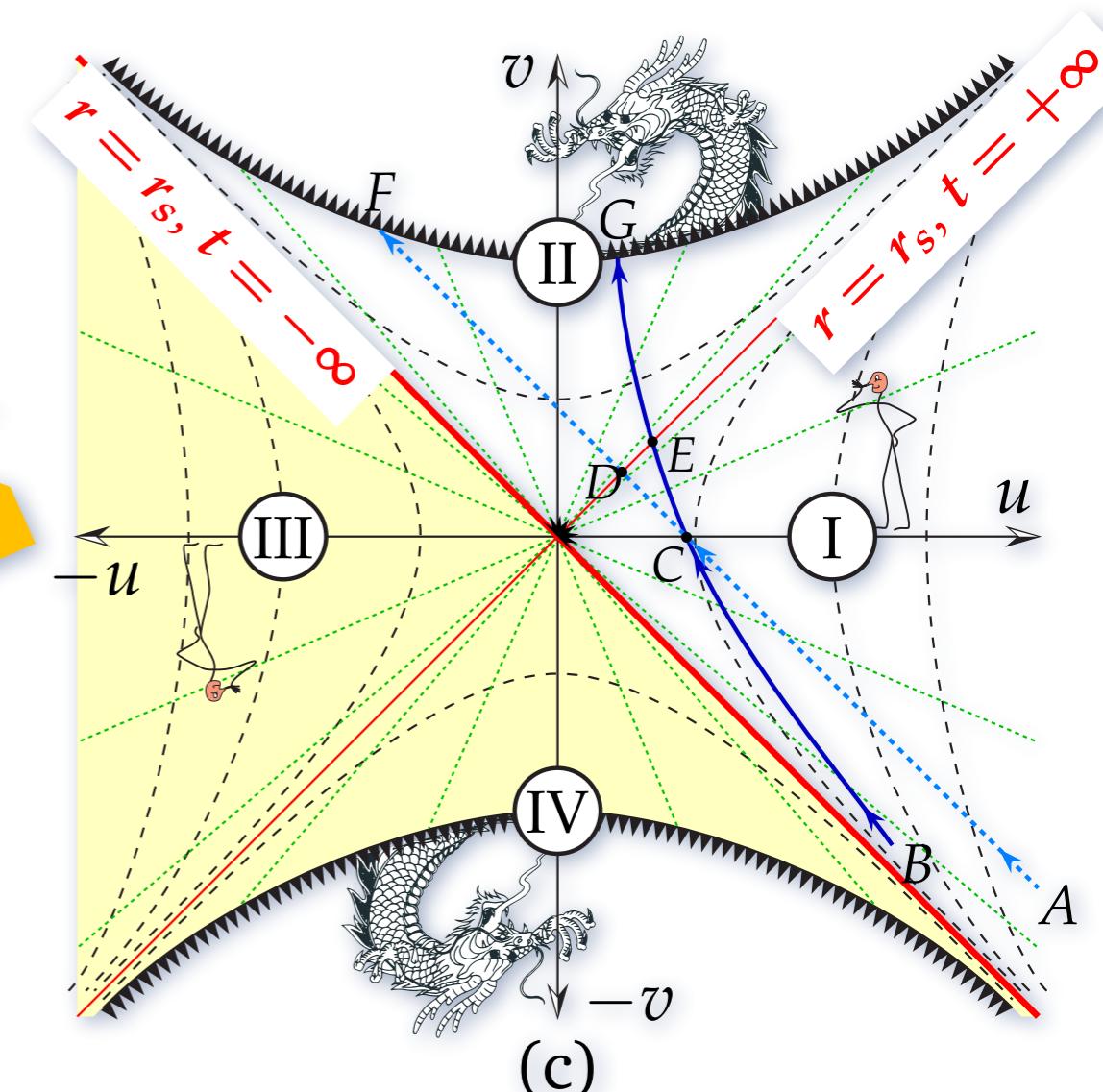
# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

Einstein-Rosen most

- Schwarzschild-ovo rešenje:



Schwarzschild-ove  
koordinate

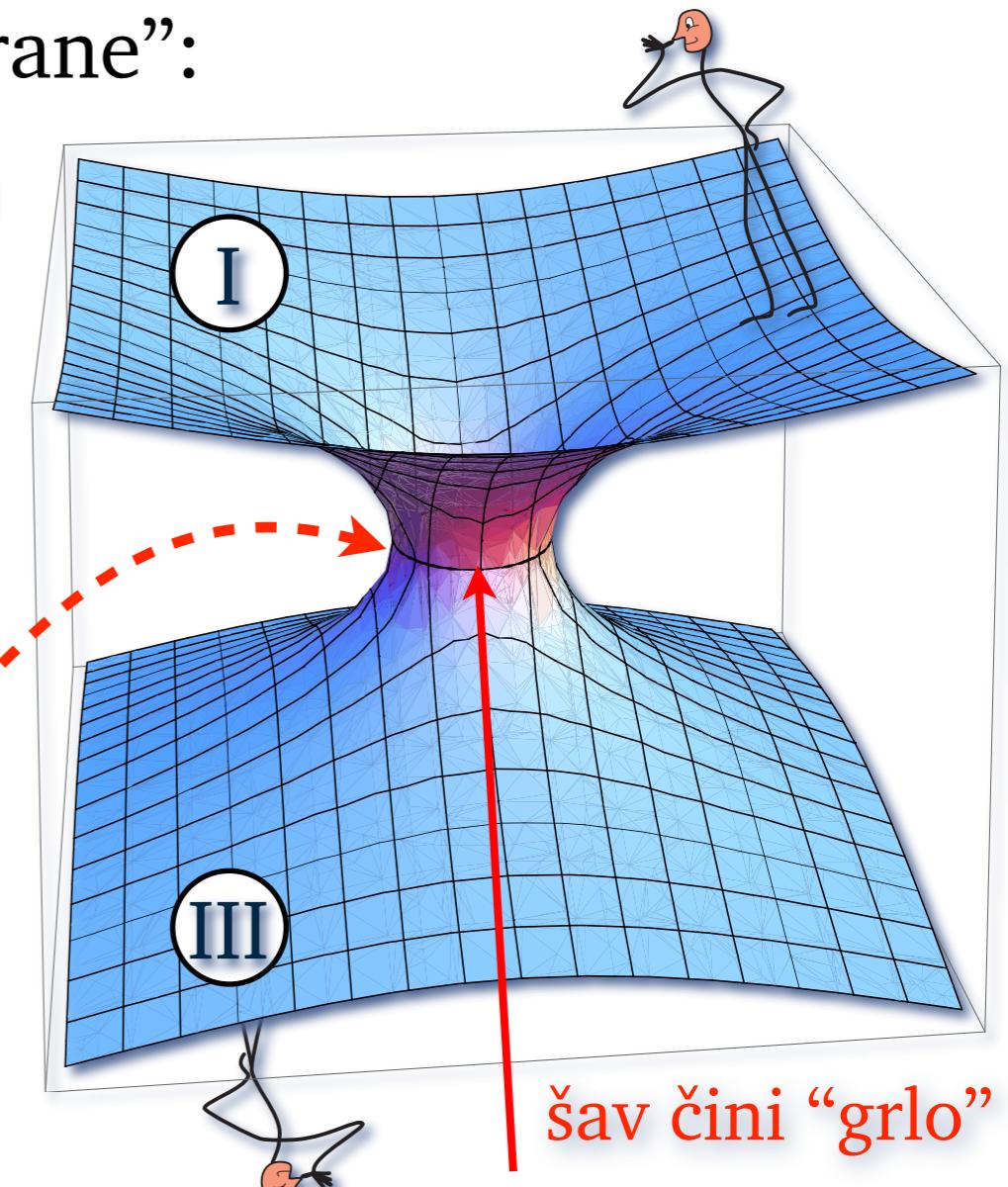
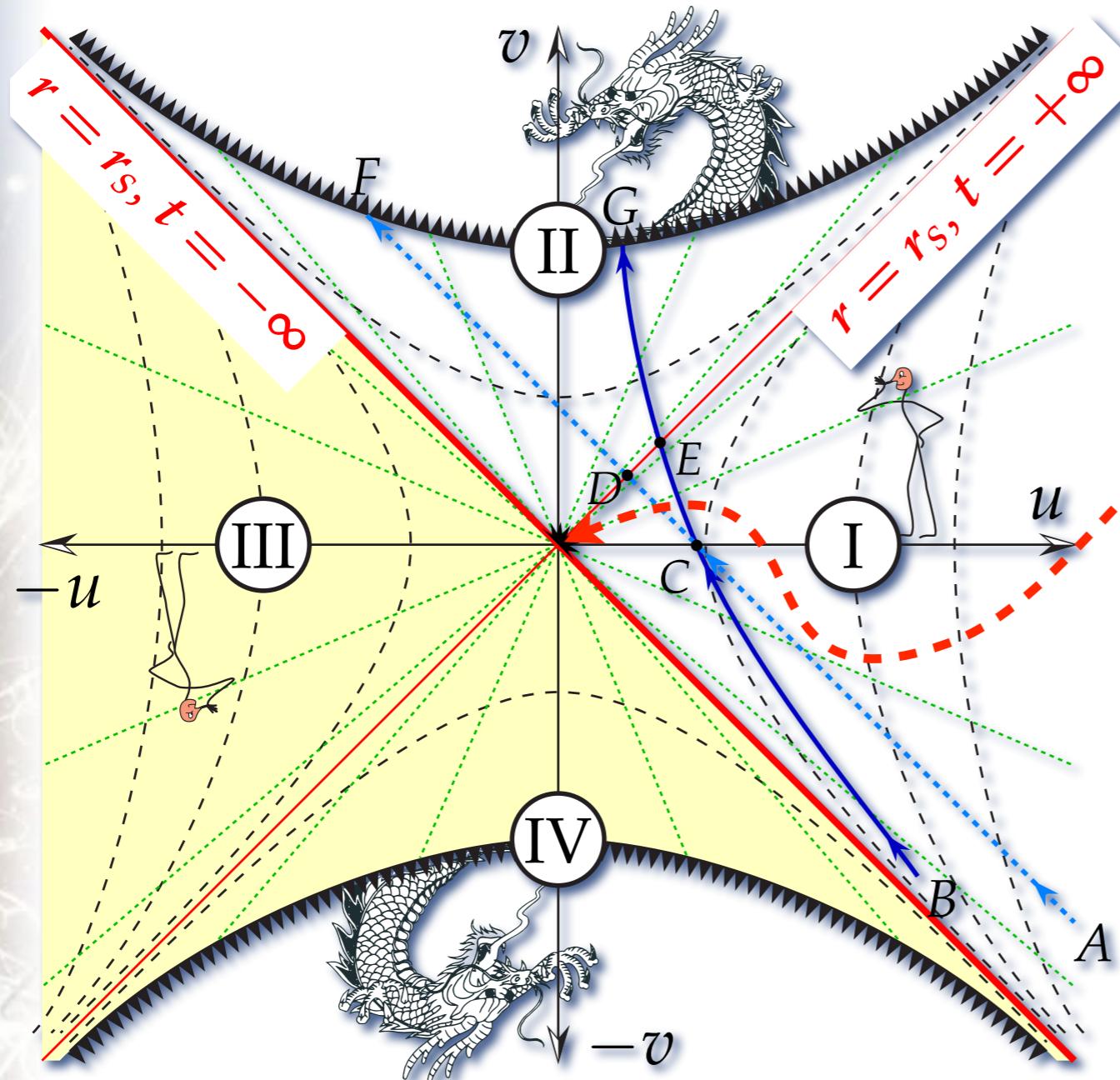


Kruskal-Szekeres  
koordinate

# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Einstein-Rosen most

- Schwarzschild-ovo rešenje ima dve “grane”:

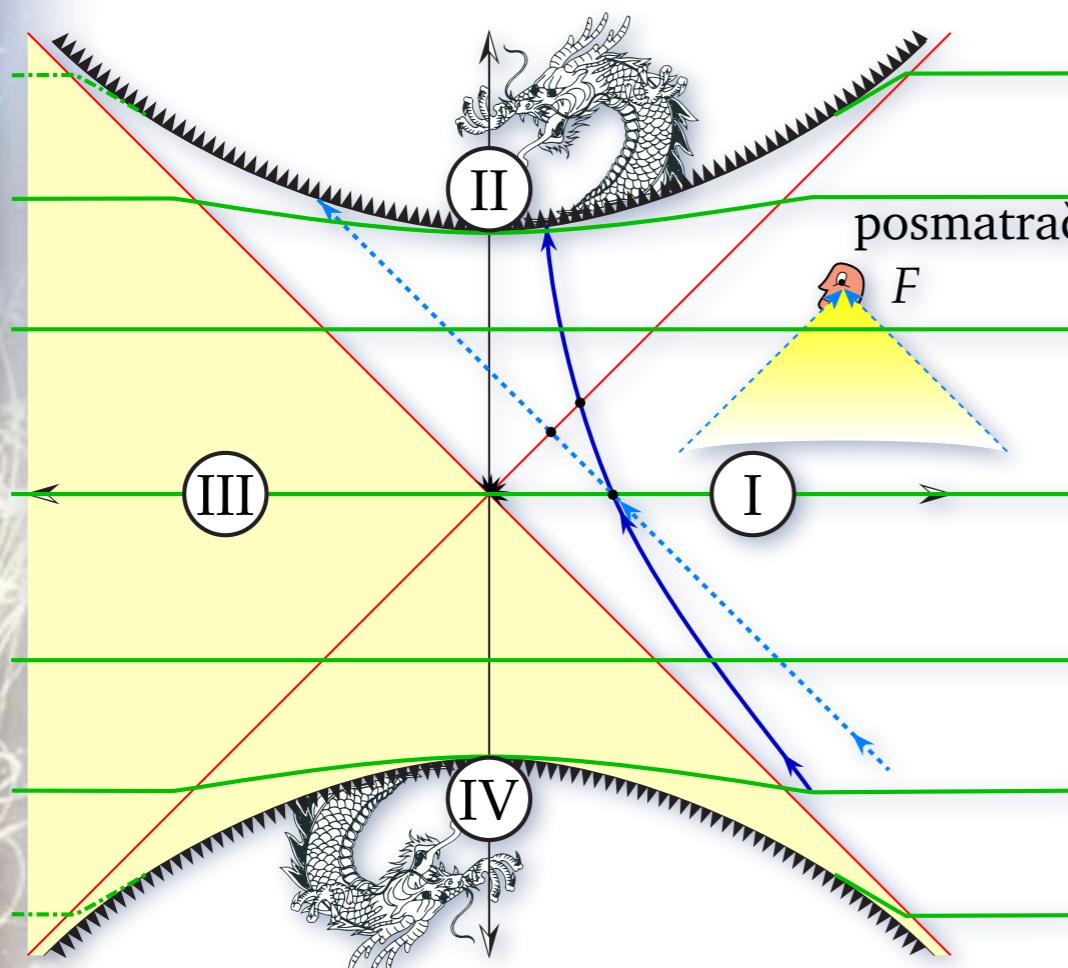


Regioni I i III su fizički, a II i IV nisu. “Šav” je u stvari tačka: koord. početak U K-Sz sistemu.

# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Einstein-Rosen most

- Mada statično, Schwarzschild-ovo rešenje ima dinamiku:



- Dve razdvojene „strane“ crne rupe, jedna strana viđena iz oblasti I, druga iz oblasti III
- Einstein-Rosen-ov most je zatvoren.
- Einstein-Rosen-ov most počinje da se zatvara; oblast I i III su još uvek prostorno povezane.
- I Einstein-Rosen-ov most maksimalno otvoren.
- Einstein-Rosen-ov most delimično otvoren; oblast I i III su prostorno povezane.
- Dve „strane“ crne rupe, spojene u jednoj tački.
- Dve razdvojene „strane“ crne rupe, jedna strana viđena iz oblasti I, druga iz oblasti III

Einstein-Rosen-ov most je zatvoren za sve realne čestice.

Ali nije za virtuelne čestice.

# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Einstein-Rosen most

- Dinamička priča Schwarzschild-ovog rešenja, tj. Einstein-Rosen-ovog mosta povezuje dva regionala prostor-vremena koji:
  1. imaju po jednu crnu rupu
  2. te se dve crne rupe u trenutku spoje;
  3. spoj tih crnih rupa se otvoru u prostorni “most” (crvotočinu) topologije (“oblika”)  $S^2 \times \mathbb{R}^1$ ;
  4. taj “most” se zatvori pre nego što bi i svetlost mogla kroz njega da prodje;
  5. ostanu dve razdvojene oblasti, sa po jednom crnom rupom.
- Prirodno je upitati se: da li postoje prolazni “mostovi”?
  - Takozvane “Lorentz-ijanske crvotočine”
  - Tipično zahtevaju materiju za potporu.
  - Tipično zahtevaju egzotičnu materiju — u “grlu” (sprečava kolaps).

# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Prohodne crvotočine

- Jednostavan primer:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\ell^2 + (k^2 + \ell^2)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2),$$

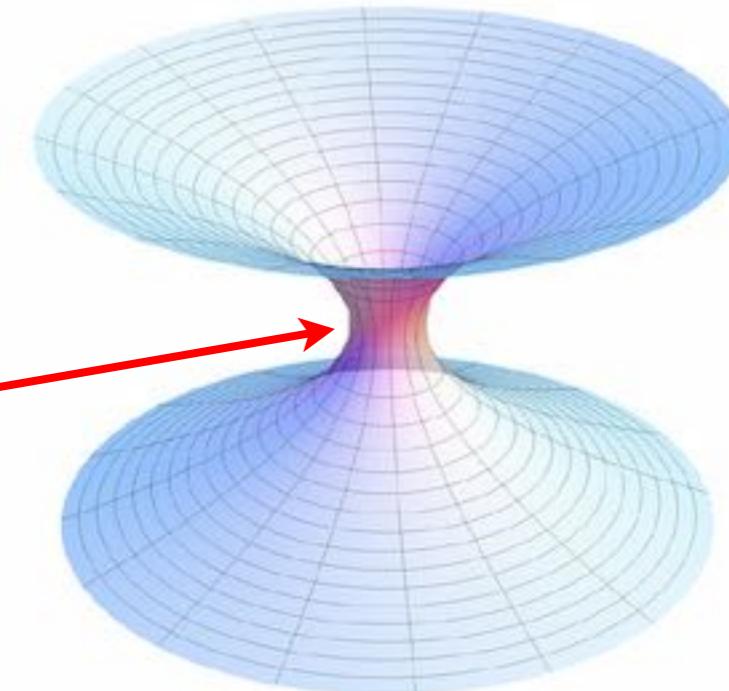
$$r = \pm \sqrt{k^2 + \ell^2} \quad k > 0 \text{ je konstanta.}$$

- Ovo daje Einstein-ov tenzor

$$[G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R] = \frac{k^2}{(k^2 + \ell^2)^2} \text{diag}[-c^2, -1, (k^2 + \ell^2), (k^2 + \ell^2) \sin^2(\theta)]$$

- ...koji može da pripada samo egzotičnoj materiji

- ...koju moramo obezbiti da (p)održi prostor-vremensku zakrivljenost ove geometrije.



# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Prohodne crvotočine

- Jednostavan primer:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\ell^2 + (k^2 + \ell^2)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2),$$

$$r = \pm \sqrt{k^2 + \ell^2}$$

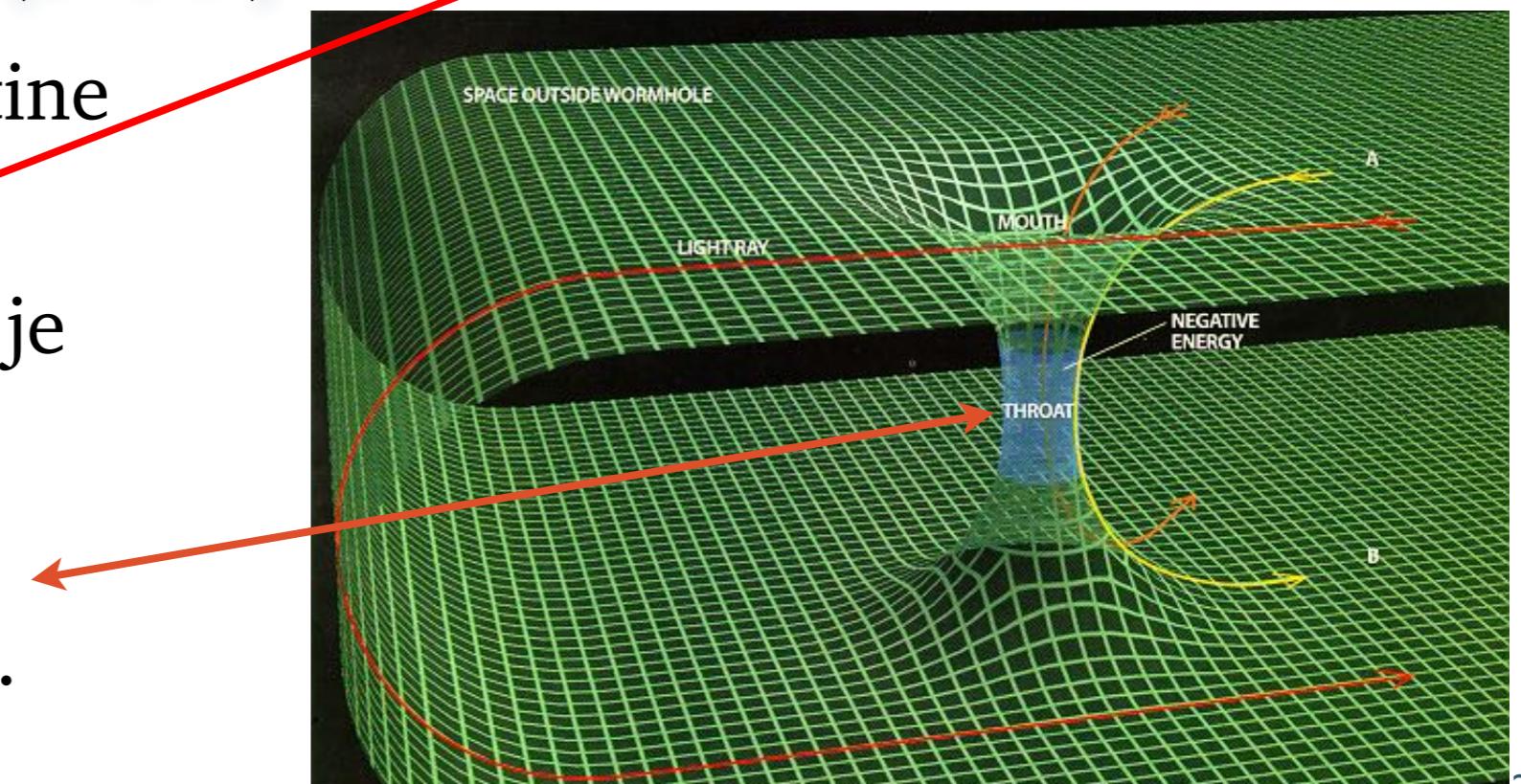
- Ovo daje Einstein-ov tenzor

$$[G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R] = \frac{k^2}{(k^2 + \ell^2)^2} \text{diag}[-c^2, -1, (k^2 + \ell^2), (k^2 + \ell^2) \sin^2(\theta)]$$

- i tako daje tenzor gustine energije-impulsa.

- Pošto  $T_{rr} < 0$ , znači da je ova materija/energija egzotična

- održava otvoreno grlo.



# Inžinjering prostor-vremena i crvotočine

## Prohodne crvotočine

- Primetimo da je metrika zadata preko kvadrata radijalne koordinate, dozvoljavajući dve “grane/sloja” rešenja.
- Ovo se jednako dogadja ako metrika zavisi od bilo koje druge parne/simetrične funkcije radijalne koordinate.
- Na primer, ako metrika zavisi of  $|\xi - \xi_*|$ , onda:
  - postoje dve “grane/sloja” rešenja
  - koje se sreću u lokaciji gde je  $\xi = \xi_*$
  - Christoffel-ov simbol će zavisiti od stepenaste funkcije  $\vartheta(\xi - \xi_*)$
  - Riemann-ov tenzor će zavisiti od Dirac-ove delta-funkcije  $\delta(\xi - \xi_*)$
  - ...kao i Ricci-jev tenzor, skalarna zakrivljenost, i Einstein-ov tenzor
  - ...pa onda i gustina tenzora energije-impulsa!
  - Onda, glatki deo predstavlja “zapreminsku” materiju/energiju
  - a deo sa  $\delta$ -funkcijom materiju/energiju lokalizovanu na mestu  $\xi = \xi_*$ .

# Hvala na pažnji!

Tristan Hübsch

*Department of Physics and Astronomy, Howard University, Washington DC*

*Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD*

*Department of Physics, Faculty of Natural Sciences, Novi Sad, Serbia*

<https://tristan.nfshost.com/>