(Fundamentalna) Fizika Elementarnih Čestica

Dan 08b: Specijalne geometrije i crne rupe

Tristan Hübsch

Department of Physics and Astronomy, Howard University, Washington DC
Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD
Department of Physics, Faculty of Natural Sciences, Novi Sad, Serbia
https://tristan.nfshost.com/

Fundamentalna Fizika Elementarnih čestica

Program

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- Opšta kovarijantizacija
  - gravitacija + Standardni Model
- Specijalna rešenja i Singulariteti
  - Masivne crne rupe
  - + naelektrisanje
  - ili + rotiranje
  - + naelektrisanje i rotiranje
  - Neki opšti slučajevi
    - ...nezaklonjeni singulariteti

SUTRA
posle pauze:

— Zoom-foto —

Sprega supstancije i gravitacije

Einstein-ove jednačine

$$S[\phi(\mathrm{x})] = \int \mathrm{d}^4\mathrm{x}\,\Big[\frac{c^3}{16\pi G_N} R - \mathscr{L}\big(\phi, (\mathscr{D}_\mu \phi), \ldots; \mathrm{x}; C_a\big)\Big]$$

- Variranjem OKT-kovarijantizovanog dejstva po $g_{\mu\nu}$ daje

Einstein-ove jednačine: $$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi\, G_N}{c^4} T_{\mu\nu},$$

- gde je

Gustina energija-impulsa: $$T_{\mu\nu} := -\frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\big(\sqrt{-g}\,\mathscr{L}_M\big)}{\delta g^{\mu\nu}}$$

- Prisustvo materije (supstancije) zakrivljuje prostor-vreme.
  - T_{00}: gustina energije
  - $T_{0i} = T_{i0}$: gustina impulsa
  - $T_{ik} = T_{ki},\ i \neq k$: stres smicanja
  - T_{ii} (bez sume): normalni stres, "pritisak" ako su sva tri jednaka

$$T^{\mu\nu} := g^{\mu\rho} T_{\rho\sigma} g^{\nu\sigma}$$

$D_\mu T^{\mu\nu} = 0$
jednačina kontinuiteta

Noether-ina Teorema

Sprega supstancije i gravitacije

Einstein-ove jednačine

svako ne-metričko/ne-Christoffel-ovo polje

- I obratno, varijacije dejstva po $\phi_i(\mathrm{x})$ daje jednačine kretanja za polja $\phi_i(\mathrm{x})$, spregnuta sa $g_{\mu\nu}$.
- Na primer,

$$\mathscr{L}_M = m\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{\partial x^\nu}{\partial t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} = 0$$

geometrija

Lako prepišemo kao:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}t^2} = F^\rho_{\mathrm{grav}} := -m\,\Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}$$

fizika

- Ovo se može razumeti na dva dualna načina:
  - Objekti se kreću po geodezijskim (ekstremnim) trajektorijama, sledeći zakrivljenost samog prostor-vremena. (Geometrija)
  - Objekti se kreću pod uticajem gravitacione sile. (Fizika)
- Potonje pretpostavlja postojanje praznog prostor-vremena u kome je gravitaciono polje rasprostranjeno a objekti se kreću.

Sprega supstancije i gravitacije

Dve obavezne paralele

- Po konstrukciji,

$$[\mathbb{A}_\mu]_\alpha{}^\beta \quad \longleftrightarrow \quad \Gamma^\rho_{\mu\nu},$$

Korisno, pošto je kalibraciono-invarijantno

$$[\mathbb{F}_{\mu\nu}]_\alpha{}^\beta \quad \longleftrightarrow \quad R_{\mu\nu\,\rho}{}^\sigma$$

jeste od koristi!

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ \vec{\mathbb{E}} = (\mathbb{F}_{0i}),\ \vec{\mathbb{B}} = (\mathbb{F}_{ij}) & & C_{\mu\nu\,\rho}{}^\sigma, E_{\mu\nu\,\rho}{}^\sigma, S_{\mu\nu\,\rho}{}^\sigma \end{array}$$

- Dok su ($\mathbb{F}_{0i}$) i ($\mathbb{F}_{ij}$) ireducibilne reprezentacije $SO(3)_R \times G_{YM}$ (tj. rotacija × kalibracione grupe),
- ($\mathbb{R}_{0i}$) i ($\mathbb{R}_{ij}$) nisu ireducibilne reprezentacije ni $SO(3)_R$ (rotacija) a tek ne $SO(1,3)$ (čitave Lorentz-ove grupe).
- Mada su ($\mathbb{A}_\mu \leftrightarrow \mathbb{\Gamma}_\mu$) i ($\mathbb{F}_{\mu\nu} \leftrightarrow \mathbb{R}_{\mu\nu}$) konceptualno analogni, ova analogija je tehnički ograničena.
- E&M: $\vec{E}\ \&\ \vec{B}$; nAYM: $\vec{E}^a, \vec{B}^a\ \&\ (\Phi^a, c\vec{A}^a)$; gravitacija: $g_{\mu\nu}(\mathrm{x})$, $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma$

  $\&\ (\Phi, \vec{A})$ *u QM*

Sprega supstancije i gravitacije

Dve obavezne paralele

- *S druge strane…*
- Einstein-ove jednačine

$$\Big\{R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\,R = \tfrac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma}) + \ldots\Big\} = \frac{8\pi\,G_N}{c^4}T_{\mu\nu}$$

- jaaako slično Gauss-Ampère jednačinama:

$$\Big\{(\Box A^\mu) - \eta^{\mu\nu}(\partial_\nu\partial_\rho A^\rho)\Big\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{4\pi}{c}\,j_e^\nu.$$

- Tako,

$$j_e^\mu \quad \longleftrightarrow \quad T_{\mu\nu},$$

obe su Noether-ine struje

$$A_\mu \quad \longleftrightarrow \quad g_{\mu\nu},$$

oba su “najosnovnija” polja

- Kao što svaka 4-struja naelektrisanja proizvodi EM polje
- i svako EM polje zadaje 4-struju koje ga održava,
- tako su tenzor energije-impulsa i zakrivljenost prostor-vremena vezani i nerazdvojivi.

Sprega supstancije i gravitacije

Dve obavezne paralele

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

- Da sumiramo:

Kalibracija faza EM & YM	Kalibracija Opšte Koord. Transf.	
	konceptualno	inžinjerski
—	$g_{\mu\nu}$	—
potencijal $\mathbb{A}_\mu$	Γ_μ	$g_{\mu\nu}$
polje $\mathbb{F}_{\mu\nu}$	$\mathbb{R}_{\mu\nu}$	Γ_μ
izvor $\mathbb{J}_\mu \propto \mathscr{D}_\mu \mathbb{F}^{\mu\nu}$	$\mathscr{D}_\mu \mathbb{R}^{\mu\nu\rho}{}_\sigma = ?$	"$\mathscr{D}_{(\mu}\Gamma_{\nu)}$" $\propto T_{\mu\nu}$

Specialna rešenja

Specialna rešenja

Jedan brzi rezultat...

- Razmotrimo Einstein-ove jednačine:

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi\, G_N}{c^4} T_{\mu\nu},$$

- ...čiji trag izjednačuje

$$R - \tfrac{1}{2} 4R = \frac{8\pi G_N}{c^4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad i.e., \quad R = -\frac{8\pi G_N}{c^4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

- zbog čega su Einstein-ove jednačine ekvivalentne

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} \Big[T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \big(g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \big) \Big]$$

Ovo ***nije*** "bez-tražni" deo tenzora energije-impulsa!

- Stoga,

$$\big(R_{\mu\nu} = 0\big) \iff \big(T_{\mu\nu} = 0\big)$$

Ricci-ravnost

- Ricci-ravno prostor-vreme ne zahteva/implicira potporu materijom
- Odsustvo materije implicira/zahteva Ricci-ravno prostor-vreme

Specialna rešenja

"Nematerijalna" (Ricci-ravna) rešenja

nAYM: $\mathscr{D}_\mu \mathbb{F}^{\mu\nu} = 0$
$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \mathscr{D}_\mu \mathbb{F}_{\nu\rho} = 0$
"glueballs"

- Razmotrimo prazno prostor-vreme: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$, tj. $T_{\mu\nu} = 0$
- To jest, prostor-vreme bez materije. (nematerijalno)
- 1915, Karl Schwatzschild (sa Ruskog fronta, kao nemački vojnik): prvo i najpoznatije Ricci-ravno rešenje Einstein-ovih jednačina.

Poginuo je u toku te godine.

$$
\begin{aligned}
[g_{\mu\nu}] &= \mathrm{diag}\Big(-f_S(r), \tfrac{1}{f_S(r)}, r^2, r^2 \sin^2(\theta)\Big),\\
\mathrm{d}s^2 &= -f_S(r)\, c^2 \mathrm{d}t^2 + \frac{1}{f_S(r)} \mathrm{d}r^2 + r^2 \big(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\, \mathrm{d}\varphi^2\big),
\end{aligned}
$$

$$
f_S(r) := \left(1 - \frac{r_S}{r}\right), \qquad r_S = \frac{2G_N M}{c^2}.
$$

- Ali, ako tu nema nikakve materije, čija je to M masa?
- To je masa singulariteta—"defekta" u prostor-vremenu—u ishodištu.

Prazno prostor-vreme može da ima masu, čak i klasično!

Specialna rešenja

"Nematerijalna" (Ricci-ravna) rešenja

- Singularitet??

$$[g_{\mu\nu}] \;=\operatorname{diag}\Big(-f_S(r),\tfrac{1}{f_S(r)},r^2,r^2\sin^2(\theta)\Big) \qquad f_S(r):=\Big(1-\frac{r_S}{r}\Big)$$

- Kako u $r=r_S$ tako i u $r=0$, komponenta metrike divergira.
  - U $r=r_S$, $f_S(r)=0$, dt^2-član iščezava a dr^2-član divergira.
  - U $r=0$, $f_S(r)=\infty$, dt^2-član divergira a dr^2-član iščezava.
  - No, to bi mogla da bude posledica "loših" koordinata! Metričke komponente nisu invarijante — čine tenzor tipa (0,2)!
- Zaista, 1933. je Georges Lemaître našao da koordinatni sistem koji je Arthur Eddington uveo još 1924. pokazuje da je $r=r_S$ lokacija savršeno dosadna… *osim što je granica bez povratka.*
- S druge strane, Kretschmann-ova invarijanta

$$\|R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}\|^2=\frac{48{G_N}^2\,M^2}{c^4\,r^6}$$

Specialna rešenja

"Nematerijalna" (Ricci-ravna) rešenja

- Fraza "$r = r_S$ lokacija je savršeno dosadna" je… *neinformativna*.
- U stvari, tu se ipak *nešto* dogodi! "1. kosmička brzina":

$$v_1 = \sqrt{\frac{2G_N\,M}{r}}.$$

- granična brzina bežanja iz gravitacionog polja mase M.

$$r_S = \frac{2G_N\,M}{c^2} \quad\Rightarrow\quad M = \frac{c^2\,r_S}{2G_N} \quad\Rightarrow\quad v_1 = \sqrt{\frac{2G_N\,\frac{c^2\,r_S}{2G_N}}{r}} = c\sqrt{\frac{r_S}{r}}$$

- pa je tu "1. kosmička brzina" nedostižna.

Horizont dogadjaja.

Lokacija bez povratka.

- Još jedan detalj! Unutar horizonta dogadjaja,

$$ds^2 = + |f_S(r)|\,c^2 dt^2 - \frac{1}{|f_S(r)|} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\varphi^2\right)$$

fizički smisao "r" i "t" je zamenjen.

Specialna rešenja

"Nematerijalna" (Ricci-ravna) rešenja

- Kada govorimo o Yang-Mills (EM, jakim, slabim) interakcijama, pretpostavljamo ravno, $\mathbb{R}^{1,3}$-liko prostor-vreme. Čak ni "topološki netrivialna" YM rešenja ne menjaju prostor-vreme. Ono je *arena*.
- U opštoj teoriji relativnosti, netrivijalno prostor-vreme nije $\mathbb{R}^{1,3}$.
- U tom opisu gravitacije, *možemo* iseći delove prostor-vremena
- …što onda čini prostor-vreme *nekompletnim*. *(→ singulariteti)*
- Nezingularnost prostor-vremena je stoga delikatan problem.
  - **Geodezijski kompletno**; finije: vremenski,- nul,- prostorno-
  - **Metrički kompletno**: konvergencija svih Cauchy-jevih nizova.
  - **B-kompletno**: ako je svaka C^1-kriva konačne dužine sadržana.
  - **Invarijante zakrivljenosti**: $R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}$ ima 20 nezav. stepeni slobode.
- B-kompletnost implicira geodezijsku, a poklapa se sa metričkom —samo ako je $g_{\mu\nu} > 0$, ne i za prostor-***vreme***.

Specijalna rešenja i singulariteti

Masivne crne rupe

- 1915, Scwarzschild-ovo rešenje… *potsetnik*:

$$
\begin{aligned}
[g_{\mu\nu}] &= \mathrm{diag}\Big(-f_S(r), \tfrac{1}{f_S(r)}, r^2, r^2\sin^2(\theta)\Big),\\
\mathrm{d}s^2 &= -f_S(r)c^2\mathrm{d}t^2 + \tfrac{1}{f_S(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\big(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\varphi^2\big),
\end{aligned}
$$

$$
f_S(r) := \Big(1 - \frac{r_S}{r}\Big), \qquad r_S = \frac{2G_N\,M}{c^2}.
$$

- Primetimo da je

$$
\Box f_S(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r f_S(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r - r_S) \equiv 0
$$

- To jest, $f_s(r)$ je harmonijska funkcija.
- Ova metrika zadovoljava Einstein-ove jednačine bez materije.
- Masa M karakterizuje sâmo prostor-vreme
  - …lokalizovana je u ishodištu, gde je singularitet,
  - …tako da Gauss-ovu sfera može da se “sažme” oko njega.

Specijalna rešenja i singulariteti

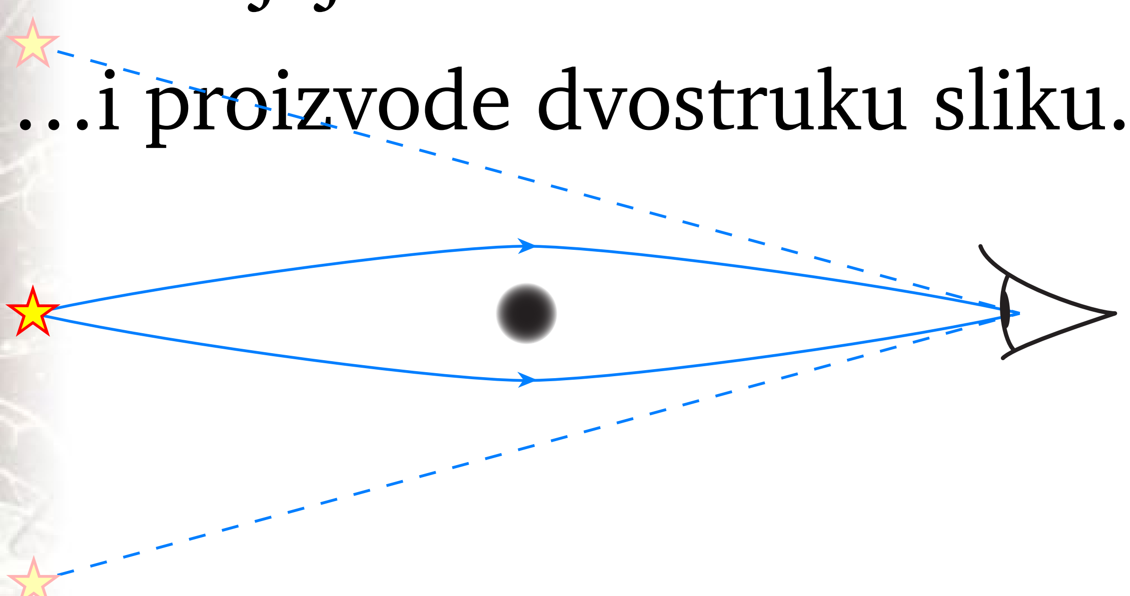
Masivne crne rupe

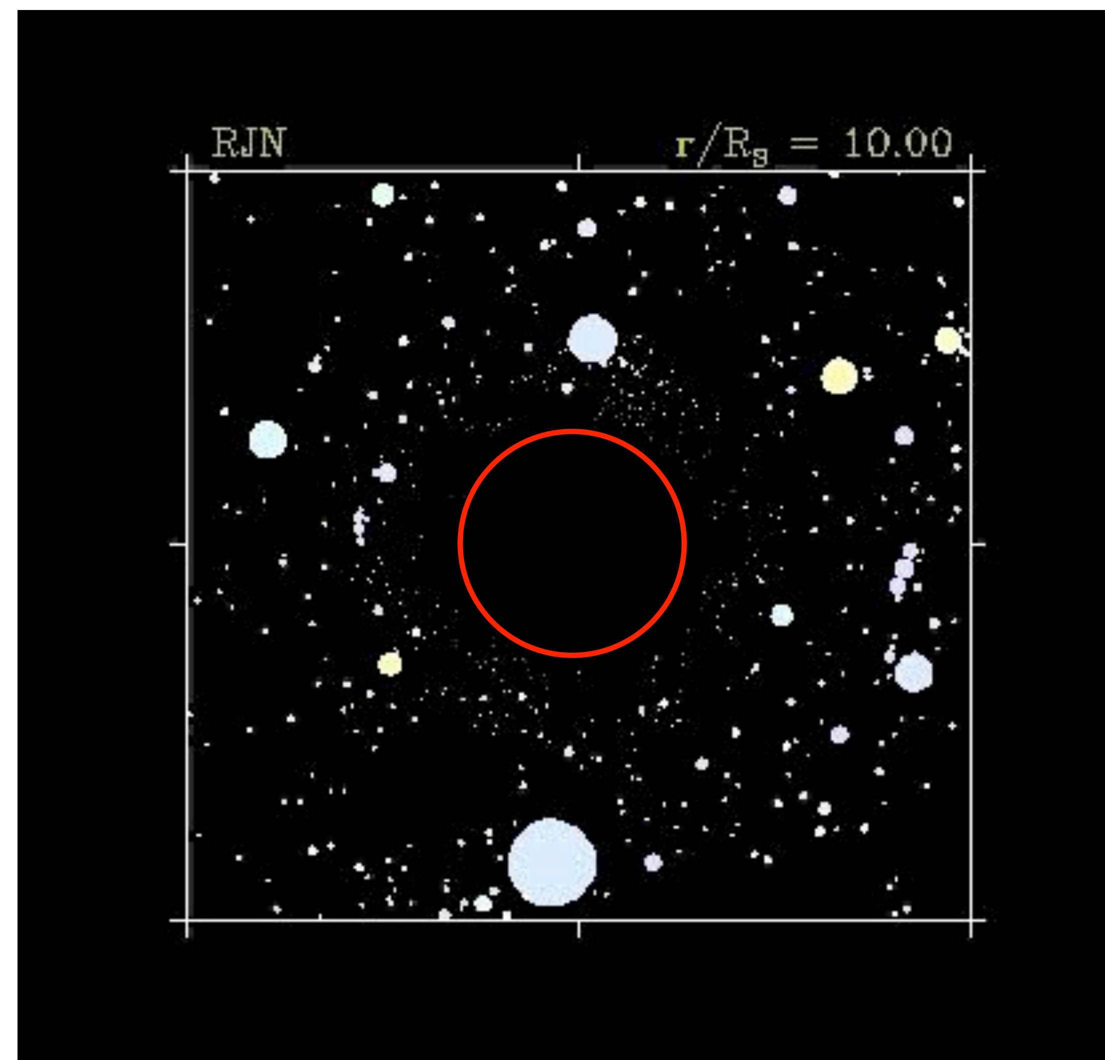
- Schwarzschild-ovo rešenje… još nekoliko detalja (zasad):
- Gauss-ovu sferu ima smisla sažeti samo do r_S, do horizonta dogadjaja: iz unutrašnjosti se informacija ne može “izvući”.
- …a, unutar r_S, Gauss-ova sfera bi morala da ima t za radijus.
- Za sve praktične potrebe, Schwarzschild-ova geometrija važi do r_S; “unutrašnjost” je nedosežna za spoljašnjeg posmatrača.
- Rešenje je asimptotski ravno i sferno simetrično
- tj. za $r \gg r_S$, približno je ravno.
- Može postojati mnogo crnih rupa, dovoljno daleko jedna od druge tako da jedna drugu ne remeti.
- Posetite, npr. http://pisces.as.utexas.edu/GenRel/

Specijalna rešenja i singulariteti

Masivne crne rupe

- Schwarzschild-ovo rešenje… još nekoliko detalja (zasad):
- Svako gravitaciono polje savija geodezijske linije (putanje “slobodnog padanja”)—pa i svetlosne zrake
- Zraci svetla emitovani na jednu i na drugu stranu crne rupe, iz izvora svetla koji prolazi iza, se savijaju…
- …i proizvode dvostruku sliku.





Specijalna rešenja i singulariteti

Masivne i naelektrisane crne rupe

- 1916–1918, Hans Reissner i Gunnar Nordstrøm:

$$[g_{\mu\nu}] = \text{diag}\big(-f_{RN}(r), \tfrac{1}{f_{RN}(r)}, r^2, r^2\sin^2(\theta)\big),$$

$$ds^2 = -f_{RN}(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{f_{RN}(r)}dr^2 + r^2\big(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\varphi^2\big),$$

~~harmonijska~~ $f_{RN}(r) := \Big(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{r_q^2}{r^2}\Big), \qquad r_q := \sqrt{\frac{q^2\,G_N}{4\pi\epsilon_0\,c^4}}.$

- Karakteristična funkcija $f_{RN}(r)$ iščezava u:

$$r_\pm = \tfrac{1}{2}\Big(r_S \pm \sqrt{r_S^2 - 4r_q^2}\Big).$$

- Postoje dva vrlo različita slučaja:
  - Kada je $2r_q < r_S$: koncentrični horizonti
  - Kada je $2r_q > r_S$, tj. $\frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} > 4\sqrt{G_N}M$, crna rupa je prenaelektrisana, *Singularitet je nezaklonjen, "go"/"nag".* nema horizonta, singularitet je dostupan svim posmatračima.

Specijalna rešenja i singulariteti

Masivne i naelektrisane crne rupe

- A, postoji i marginalni slučaj “izmedju”:
  - kada je $2r_q = r_S$: horizonti se poklope extremno R-N rešenje
- …za koje je gravitaciono privlačenje i elektrostatičko odbijanje dva takva rešenja u ravnoteži — efektivno kao da nema interakcije!
- Roger Penrose: “hipoteza kosmičke cenzure”: da je svaki fizički singularitet zaklonjen iza horizonta dogadjaja.
- Prenaelektrisana Reissner-Nordstrøm crna rupa dakle krši Penrose-ovu hipotezu kosmičke cenzure
- …zbog čega se ***veruje*** da nije moguće konstruisati prenaelektrisanu crnu rupu (nezaklonjen/goli singularitet)
- …bez obzira, i sama mogućnost a priori postojanja je instruktivna
- Fizički jako netrivijalno $g_{\mu\nu}$ rešava Einstein-ove jednačine, bez materije dodate za potporu/održavanje.

Specijalna rešenja i singulariteti

Masivne i rotirajuće crne rupe

- 1963, Roy Kerr (1967, Robert H. Boyer + Richard H. Lindquist):

$$\mathrm{d}s^2 = -\Big(1 - \frac{r_S\, r}{\rho^2}\Big) c^2 \mathrm{d}t^2 + \rho^2 \Big(\frac{1}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\theta^2\Big)$$

$$+ \Big(r^2 + \ell^2 + \frac{r_S\, r\, \ell^2}{\rho^2}\sin^2(\theta)\Big)\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\varphi^2 - \frac{2r_S\, r\, \ell\, \sin^2(\theta)}{\rho^2}\, c\, \boxed{\mathrm{d}t\, \mathrm{d}\varphi,}$$

$$\ell := \frac{L}{Mc}, \qquad \rho := \sqrt{r^2 + \ell^2 \cos^2(\theta)}, \qquad \Delta := r^2 - r_S\, r + \ell^2,$$

- gde je L ugaoni momenat.
- (ct, r, θ, ϕ) koordinate **nisu ortogonalne.**
- Ima dva para “horizonta”:

$\Delta = 0$: horizont dogadjaja
Cauchy-ev horizont

+ prstenasti
singularitet
u unutrašnjosti

$$r_{H\pm} = \tfrac{1}{2}\Big(r_S \pm \sqrt{r_S^2 - 4\ell^2}\Big) \qquad r_{E\pm} = \tfrac{1}{2}\Big[r_S \pm \sqrt{r_S^2 - 2\ell^2[1 + \cos(\theta)]}\Big]$$

$g_{rr} \to \infty$ horizont dogadjaja $\quad g_{tt} \to 0$ elipsoid “ergosfere”

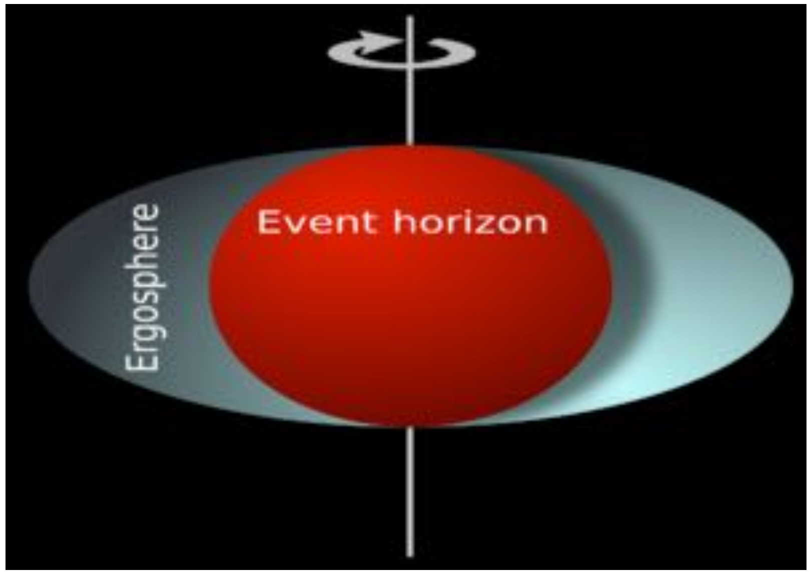
Specijalna rešenja i singulariteti

Masivne i rotirajuće crne rupe

- Region izmedju unutrašnjeg sfernog horizonta dogadjaja i spoljašnjeg elipsoida se zove “ergoregion” (ili “ergosfera”)
- Unutar ergoregiona, prostor-vreme sâmo rotira sa gledišta spoljašnjeg posmatrača, ugaonom brzinom

$$\Omega = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{r_S\, r\, \ell\, c}{\rho^2(r^2+\ell^2) + r_S\, r\, \ell^2 \sin^2(\theta)}$$

- Objekti koji “uskoče” kroz ergoregion moraju da ko-rotiraju
- …čak i ako je to brže od c, gledano spolja.
- Uskakanje u ergoregion dozvoljava obilaženje “paralelnih” objekata spolja
- …i ekstraciju energije: Penrose-ov proces.
- Iz ergoregiona je moguće izaći pre nego se ušlo.



Specijalna rešenja i singulariteti

Masivne, nalektrisane i rotirajuće crne rupe

- 1965. je Ezra Newman prilagodio Kerr-ovo rešenje:

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\boxed{\Big(c\,\mathrm{d}t - \ell\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\Big)^2} + \rho^2\Big(\frac{1}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\theta^2\Big)$$
$$+\frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2}\boxed{\Big((r^2+\ell^2)\mathrm{d}\varphi - \ell c\,\mathrm{d}t\Big)^2},$$

$$\ell := \frac{L}{Mc}, \quad \rho := \sqrt{r^2+\ell^2\cos^2(\theta)}, \quad \Delta := r^2 - r_S\,r + \ell^2 + r_q^2, \quad r_q := \sqrt{\frac{q^2\,G_N}{4\pi\epsilon_0\,c^4}}$$

- (ct, r, θ, ϕ) koordinate nisu orthogonalne.
- "Geometrija horizonata" je mnogo komplikovanija.
- Ravnoteža izmedju mase, ugaonog momenta, i naelektrisanja.
  - Ako je $r_S^2 > 4(\ell^2 + r_q^2)$, horizont dogadjaja i ergoregion
  - Ako je $r_S^2 < 4(\ell^2 + r_q^2)$, nema ni horizonta dogadjaja ni ergoregiona
- Pre-naelektrisanje/rotiranje ⇒ nema horizonta, goli singularitet

Specijalna rešenja i singulariteti

Masivne, nalektrisane i rotirajuće crne rupe

- 1972–1973, Akira Tomimatsu + Humitaka Sato:

$$ds^2 = -F\big[c\,dt - G\,d\varphi\big]^2 + F^{-1}\big[E\,(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2\big],$$

- u polarnim koordinatama. Funkcije E, F, G se lakše zadaju u "sferoidnim" koordinatama

$$x = \rho_0\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi, \quad y = \rho_0\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi,$$

$$z = \rho_0\,\xi\eta, \quad \rho = \rho_0\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}$$

- Pa:

$$E(\xi,\eta) := \frac{A(\xi,\eta)}{p^{2\delta}(\xi^2-\eta^2)^{\delta^2}}, \quad F(\xi,\eta) := \frac{A(\xi,\eta)}{B(\xi,\eta)}, \quad \rho_0 := \frac{G_N}{c^2}\frac{p}{\delta}m$$

$$G(\xi,\eta) := \frac{2L/mc}{A(\xi,\eta)}(1-\eta^2)C(\xi,\eta), \quad p = \sqrt{1 - \frac{c^2}{{G_N}^2}\frac{L^2}{m^4}}$$

$\boxed{\delta \in \mathbb{R}}$

- gde su $A(\xi,\eta)$, $B(\xi,\eta)$, $C(\xi,\eta)$ polinomi reda $2\delta^2$, $2\delta^2$ i $2\delta^2-1$, respektivno.

Specijalna rešenja i singulariteti

Masivne, nalektrisane i rotirajuće crne rupe

- Za $\delta = 1$, Tomimatsu-Sato rešenje = Kerr-ovom
- Za $\delta \neq 1$, Tomimatsu-Sato rešenja imaju gole singularitete
- Ova rešenja su tek mali broj iz velike klase znanih, egzaktih rešenja Einstein-ovih jednačina bez materijalne potpore
- …koja najčešće imaju razne prostor-vremenske singularitete
- …i masu, i naelektrisanje i ugaoni momenat.
- Pa, da li se elektron može opisati kao naelektrisana crna rupa?
- Sa podacima $q_e = 1.602\,176 \times 10^{-19}$ C i $m_e = 9.109\,382 \times 10^{-31}$ kg,

$$r_q(e^-) = 9.152 \times 10^{-37}\,\mathrm{m} < \ell_P$$

$$r_S(e^-) = 1.353 \times 10^{-57}\,\mathrm{m} \ll \ell_P$$

- Ovaj model nije pogrešan, već je ***besmislen***: ne može da ima nikakve merljive posledice. A ima indirektnih problema…

Kafica !!

Tristan Hübsch

Department of Physics and Astronomy, Howard University, Washington DC
Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD
Department of Physics, Faculty of Natural Sciences, Novi Sad, Serbia
https://tristan.nfshost.com/