(Fundamentalna) Fizika Elementarnih Čestica

Dan 05b: Kalibracioni princip: konkretni računi

Tristan Hübsch

Department of Physics and Astronomy, Howard University, Washington DC
Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD
Department of Physics, Faculty of Natural Sciences, Novi Sad, Serbia
https://tristan.nfshost.com/

Fundamentalna Fizika Elementarnih Čestica

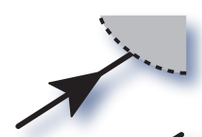
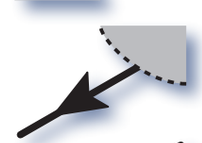
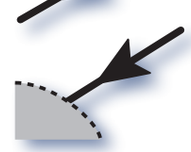
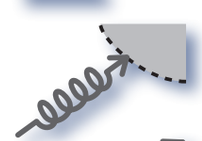
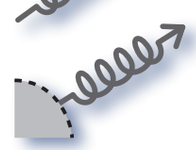
Program za danas (od pauze)

- **Konkretni QCD računi**
  - Feynman-ova pravila
  - Gluonske petlje i interakcije
    - nelinearnost
    - kalibracioni uslovi
  - Kvark-kvark interakcija
    - Računanje faktora boje
    - $[qq]_{\bar{\mathbf{3}}}$ i $[qq]_{\mathbf{6}}$
    - $f_c(\bar{\mathbf{3}}|\bar{\mathbf{3}})$, $f_c(\bar{\mathbf{3}}|\bar{\mathbf{3}}')$, $f_c(\mathbf{6}|\bar{\mathbf{3}})$, $f_c(\bar{\mathbf{3}}|\mathbf{6})$, $f_c(\mathbf{6}|\mathbf{6})$, $f_c(\mathbf{6}|\mathbf{6}')$
  - Kvark-antikvark interakcija
    - Računanje faktora boje
    - $[q\bar{q}]_{\mathbf{1}}$ i $[q\bar{q}]_{\mathbf{8}}$
    - $f_c(\mathbf{1}|\mathbf{1})$, $f_c(\mathbf{1}|\mathbf{8})$, $f_c(\mathbf{8}|\mathbf{8})$, $f_c(\mathbf{8}|\mathbf{8}')$
- **Zaključak: $SU(3)_c$ formalizam**

Konkretni QCD računi

Feynman-ova pravila

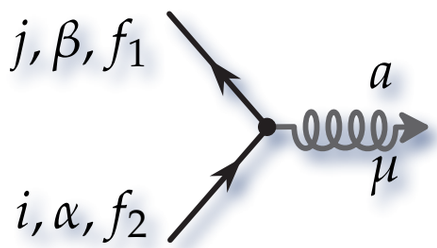
1. Notacija:
   - 4-momenti: eksterni = $p_1, p_2, \ldots$, interni = $q_1, q_2, \ldots$
   - Orijentacija:
     - Za spin-½ česticu, sa 4-momentom
     - Za spin-½ antičesticu, nasuprot 4-momenta
     - Gluonske linije: realne uz vreme, interne (virtuelne) = proizvoljne
   - Polarizacije:

Spin-$\frac{1}{2}$ kvark	*ulazni*		$u^s_f \chi^\alpha$	s = *projekcija spina* = $\uparrow, \downarrow$ α = *boja kvarka* = *c, ž, p* f = *vrsta kvarka:* $u, d, s, \ldots$
	izlazni		$\overline{u}_{f,s}\, \chi^\dagger_\alpha$	
Spin-$\frac{1}{2}$ antikvark	*ulazni*		$\overline{v}_{f,s}\, \chi^\dagger_\alpha$	(≅ *spin-½ kvark, putuje unazad u vremenu*)
	izlazni		$v^s_f \chi^\alpha$	
Gluon	*ulazni*		$\epsilon^\mu \chi^a$	$\epsilon^\mu p_\mu = 0 \quad i \quad \epsilon^0 = 0$
	izlazni		$\epsilon^{\mu *} \chi^{a *}$	

Konkretni QCD računi

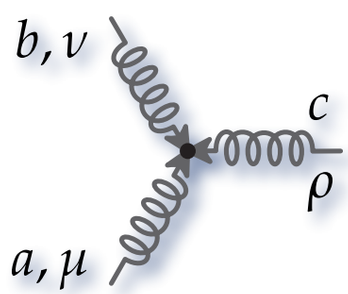
Feynman-ova pravila

- 2. Verteksi
  - Kvark-gluon:



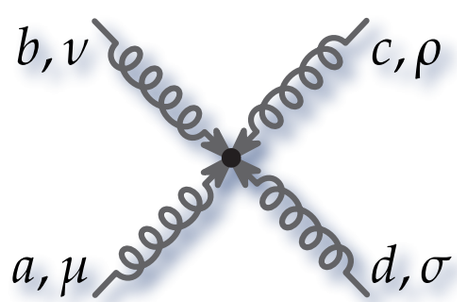
$$\rightarrow \quad -ig_c \boldsymbol{\gamma}^\mu \, \delta^{f_1}_{f_2} \left(\tfrac{1}{2}\lambda_a\right)^\beta{}_\alpha$$

  - 3-gluonski:



$$\rightarrow \quad -g_c f^{abc}[\eta_{\mu\nu}(k_1-k_2)_\rho + \eta_{\nu\rho}(k_2-k_3)_\mu + \eta_{\rho\mu}(k_3-k_1)_\nu]$$

  - 4-gluonski:

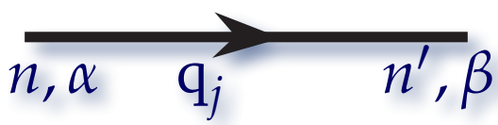


$$\rightarrow \quad -ig_c^2[f^{abe}f^{cd}{}_e(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}) + f^{ace}f^{db}{}_e(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) + f^{ade}f^{bc}{}_e(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma})]$$

Konkretni QCD računi

Feynman-ova pravila

3. Propagatori = interne linije
   - Kvarkovi:



$$\rightarrow \quad \frac{i\delta^{n,n'}\delta^{\beta}_{\alpha}}{\not{q}_j - m_j c} = i\delta^{n,n'}\delta^{\beta}_{\alpha}\frac{\not{q}_j + m_j c\mathbb{1}}{q_j^2 - m_j^2 c^2},$$

   - Gluoni:

$$\rightarrow \quad -i\frac{\eta_{\mu\nu}}{q_g^2}\delta^{ab}$$

   - Interne linije predstavljaju virtuelne čestice (van masene ljuske).
4. Očuvanje 4-momenta
   - Svakom verteksu pripisati $(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum k)$, $k = p_i, q_j$
5. Integral po svakom internom 4-momentu: $\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4 q_j$
6. Očitati: $-i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum_i p_i)$

Konkretni QCD računi

Feynman-ova pravila

- 7. Za svaku fermionsku petlju = jedan (-1) faktor
- 8. Amplitude za parcijalne procese koji su povezani razmenom neparnog para fermiona imaju relativni "$-$" predznak.
- Organizujemo Feynman-ove dijagrame:
  - po stepenu jačine interakcije, g_c , kao i po broju petlji.
- Ove amplitude se ne mogu koristiti kao u elektromagnetizmu,
- … jer kvarkove ne možemo izdvojiti kao slobodne čestice.
- Ipak, one mogu ukazati na relativne verovatnoće,
- …pomalo nalik na primenu Wigner-Eckardt-ove teoreme:

$$\frac{\sigma_{\text{proces 1}}}{\sigma_{\text{proces 2}}} = \frac{|\mathscr{M}_1|^2}{|\mathscr{M}_2|^2} = \frac{|(\text{spin})_1 \cdot (\text{izospin})_1 \cdot (\text{boja})_1 \cdot (\text{ostalo})_1|^2}{|(\text{spin})_2 \cdot (\text{izospin})_2 \cdot (\text{boja})_2 \cdot (\text{ostalo})_2|^2}$$

Konkretni QCD računi

Gluonske petlje i interakcije

- Gluonski Lagranžijan sadrži

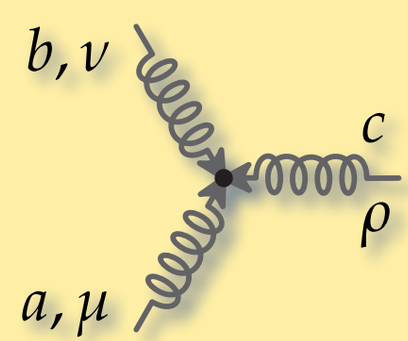
$$\mathbb{F}_{\mu\nu} := \frac{\hbar c}{i g_c}\left[\partial_\mu + \frac{i g_c}{\hbar c}\mathbb{A}_\mu, \partial_\nu + \frac{i g_c}{\hbar c}\mathbb{A}_\nu\right] = \partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu + \frac{i g_c}{\hbar c}[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu],$$

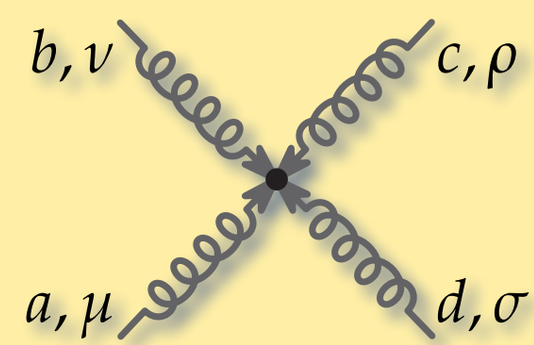
$$= \partial_{[\mu}\mathbb{A}_{\nu]} + \frac{i g_c}{\hbar c}[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu]$$

- čiji kvadrat daje:

$$\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu} = \left(\partial_{[\mu}\mathbb{A}_{\nu]} + \frac{i g_c}{\hbar c}[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu]\right)\left(\partial^{[\mu}\mathbb{A}^{\nu]} + \frac{i g_c}{\hbar c}[\mathbb{A}^\mu, \mathbb{A}^\nu]\right)$$

$$= \partial_{[\mu}\mathbb{A}_{\nu]}\partial^{[\mu}\mathbb{A}^{\nu]} + \frac{2 i g_c}{\hbar c}\,\partial_{[\mu}\mathbb{A}_{\nu]}[\mathbb{A}^\mu, \mathbb{A}^\nu] - \frac{g_c^2}{\hbar^2 c^2}\,[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu][\mathbb{A}^\mu, \mathbb{A}^\nu]$$





upamtiti, za kasnije…

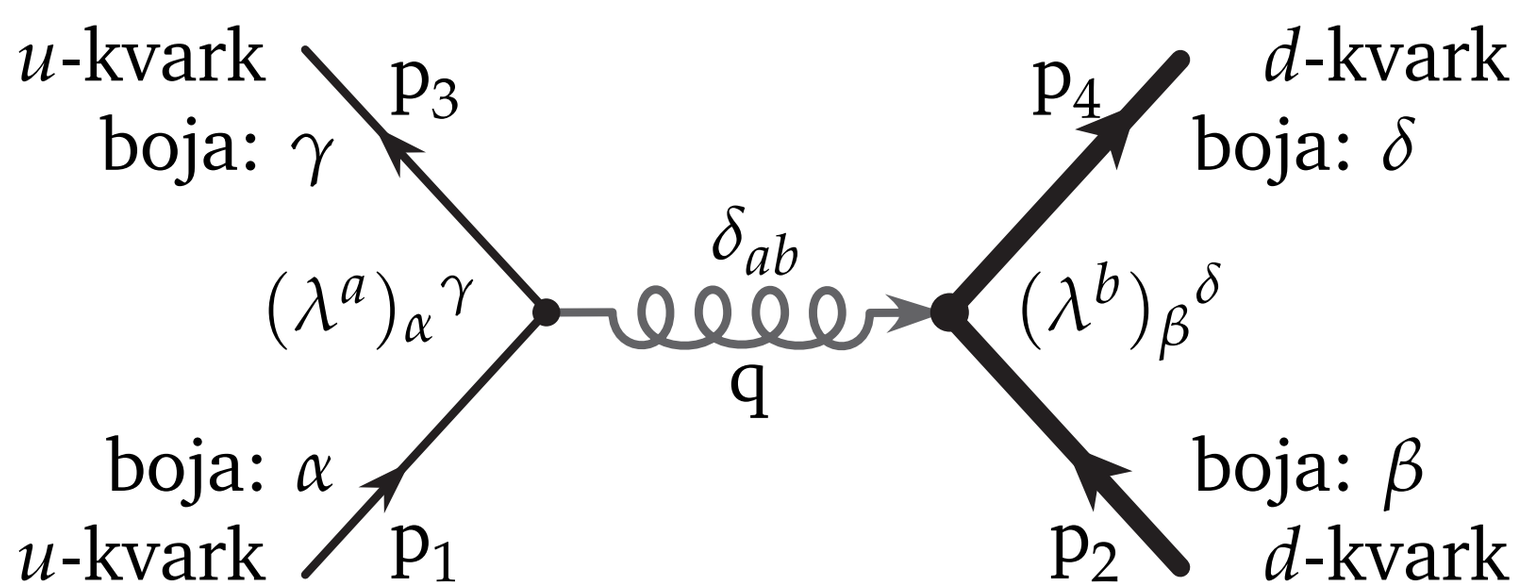
Konkretni QCD računi

Kvark-kvark interakcija

- Posmatrajmo konkretan proces, kao što je $p^+ + n^0 \to p^+ + n^0$.
- Analiziramo kao $[duu]+[ddu] \to [duu]+[ddu]$,
  - gde je jaka interakcija dominantna
  - pa posmatramo kvark-kvark interakciju
  - $\left(d+d \to d+d\right) \approx \left(d+u \to d+u\right) \approx \left(u+u \to u+u\right)$
  - Pa onda i: $\left(p^+ + p^+ \to p^+ + p^+\right) \approx \left(p^+ + n^0 \to p^+ + n^0\right) \approx \left(n^0 + n^0 \to n^0 + n^0\right)$
  - …po Heisenberg-ovom izvornom uvodjenju izospina.

do na korekcije $O\left(\frac{|m_u - m_d|}{m_u + m_d}\right) \approx 33\,\%$

- Npr.



Konkretni QCD računi

Kvark-kvark interakcija

- Računanje amplitude se razlikuje od elektrodinamike samo u faktoru boje:

$$\mathscr{M}_{d+u\to d+u} = \underbrace{-\frac{g_s^2}{2}\frac{1}{q^2}\left[\overline{u}_3\boldsymbol{\gamma}^\mu u_1\right]\left[\overline{u}_4\boldsymbol{\gamma}_\mu u_2\right]}_{\text{elektrodinamika}}\underbrace{\left(\chi_3^\dagger\boldsymbol{\lambda}^a\chi_1\right)\left(\chi_4^\dagger\boldsymbol{\lambda}_a\chi_2\right)}_{\text{novo}}$$

- Koristeći se elektrodinamičkim računom, uz zamenu $g_e \to g_c$,
- Izračunamo faktor boje, $f_c(3,4|1,2) = \frac{1}{4}(\chi_3^\dagger\boldsymbol{\lambda}^a\chi_1)(\chi_4^\dagger\boldsymbol{\lambda}_a\chi_2)$
- …za sve moguće slučajeve.
- Pošto bi elektrodinamička amplituda dala

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} = \frac{\alpha_e\hbar c}{r}$$

- …QCD amplituda će dati

$$V_{qq}(r) = f_c\frac{\alpha_s\hbar c}{r}$$

ostaje da se odredi

Konkretni QCD računi

Kvark-kvark interakcija

- Stoga, računamo

$$f_c(3,4|1,2) = \tfrac{1}{4}(\chi_3^\dagger \boldsymbol{\lambda}^a \chi_1)(\chi_4^\dagger \boldsymbol{\lambda}_a \chi_2) \;=\; \tfrac{1}{4}\underbrace{\boxed{\chi_{3\gamma}^\dagger\, \chi_{4\delta}^\dagger}}_{\text{izlaz}} (\lambda^a)_\alpha{}^\gamma\, (\lambda_a)_\beta{}^\delta \underbrace{\boxed{\chi_1^\alpha\, \chi_2^\beta}}_{\text{ulaz}}.$$

- …za sva moguća dvo-kvarkovska ulazna i izlazna stanja.
- Koristimo tenzorsko—matrični prevod notacije za boju:

$$\chi^r \leftrightarrow \delta_1^\alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad \chi^y \leftrightarrow \delta_2^\alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad \chi^b \leftrightarrow \delta_3^\alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

- kao i da je

$$(\mathbf{3}\otimes\mathbf{3})_A = \mathbf{3}^* \quad \chi_1^{[\alpha}\chi_2^{\beta]} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta - \delta_\gamma^\beta\delta_\delta^\alpha)\,\chi_1^\gamma\chi_2^\delta \qquad \alpha \neq \beta,\ \alpha,\beta = 1,2,3$$

$$(\mathbf{3}\otimes\mathbf{3})_S = \mathbf{6} \quad \chi_1^{(\alpha}\chi_2^{\beta)} := \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta + \delta_\gamma^\beta\delta_\delta^\alpha) \\ \delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta \end{array}\right\}\chi_1^\gamma\chi_2^\delta \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha \neq \beta, \\ \alpha = \beta, \end{array}\right. \quad \alpha,\beta = 1,2,3$$

Konkretni QCD računi

Neke $SU(3)_c$ reprezentacije

- Fundamentalna reprezentacija
  - u oznaci "**3**", za kompleksni 3-dimenzioni vektorski prostor,
  - ...razapeta (t^1, t^2, t^3): $c_1 t^1 + c_2 t^2 + c_3 t^3$, tj. $\mathbb{C}^3 = \{c_1, c_2, c_3\}$
  - ...koje $SU(3)_c$ transformiše jedan u drugi.
- Antisimetrični proizvod = antisimetrični tenzor ranga 2
  - se identifikuje sa **3***: $t_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, t^{[\beta\gamma]}$
  - predstavljen linearnom kombinacijom $t^{[12]}$, $t^{[13]}$ i $t^{[23]}$,
  - ...koje $SU(3)_c$ transformiše jedan u drugi.
- Simetrični proizvod = simetrični tenzor ranga 2
  - se identifikuje sa **6**:
  - predstavljen linearnom kombinacijom
  - $t^{(11)}$, $t^{(22)}$, $t^{(33)}$, $t^{(12)}$, $t^{(13)}$ i $t^{(23)}$,
  - ... koje $SU(3)_c$ transformiše jedan u drugi.

Konkretni QCD računi

Kvark-kvark interakcija

- Slučajevi $f_c(3,4|1,2)$ koje nam je ispitati
- gde (1,2) i (3,4) predstavljaju slučajeve:
  - dve kopije istog elementa iz $\bar{\mathbf{3}}$: $f_c(\bar{\mathbf{3}}|\bar{\mathbf{3}})$, npr. [13]|[13];
  - dva različita elementa iz $\bar{\mathbf{3}}$: $f_c(\bar{\mathbf{3}}|\bar{\mathbf{3}}')$, npr. [12]|[13];
  - jedan element iz **v** i jedan iz **6**: $f_c(\mathbf{6}|\bar{\mathbf{3}})$, npr.

    (11)|[12], (33)|[12], (13)|[13] i (12)|[13];
  - dve kopije istog elementa iz **6**: $f_c(\mathbf{6}|\mathbf{6})$, npr. (11)|(11);
  - dva različita elementa iz **6**: $f_c(\mathbf{6}|\mathbf{6}')$, npr. (11)|(33).
- Ima još ostalih izbora, ali delovanje $SU(3)_c$-transformacije ih sve prevode u jedan od ovih ***osam*** slučajeva.
- Stoga je dovoljno proveriti ovih osam primera.

Konkretni QCD računi

Kvark-kvark interakcija

- Razmotrimo jedan primer za $f_c(\bar{\mathbf{3}}\,|\,\bar{\mathbf{3}})$:

$$\left\{\frac{1}{4}\,(\chi^{\dagger}_{3\gamma}\,\chi^{\dagger}_{4\delta})_{\mathbf{3}}\,(\lambda^a)_\alpha{}^\gamma\,(\lambda_a)_\beta{}^\delta\,(\chi^\alpha_1\,\chi^\beta_2)_{\mathbf{3}^*}\right\}$$

$$\supset \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta^1_\gamma\delta^3_\delta - \delta^1_\delta\delta^3_\gamma\right)(\lambda^a)_\alpha{}^\gamma\,(\lambda_a)_\beta{}^\delta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta^\alpha_1\delta^\beta_3 - \delta^\beta_1\delta^\alpha_3\right),$$

$$= \frac{1}{8}\left[\lambda^a{}_1{}^1\,\lambda_{a3}{}^3 - \lambda^a{}_3{}^1\,\lambda_{a1}{}^3 - \lambda^a{}_1{}^3\,\lambda_{a3}{}^1 + \lambda^a{}_3{}^3\,\lambda_{a1}{}^1\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\lambda^a{}_1{}^1\,\lambda_{a3}{}^3 - \lambda^a{}_3{}^1\,\lambda_{a1}{}^3\right].$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}_4 = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_5 = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}},\quad \boldsymbol{\lambda}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}_8 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}.$$

$$= \frac{1}{4}\left[\lambda^8{}_1{}^1\,\lambda_{83}{}^3 - \lambda^4{}_3{}^1\,\lambda_{41}{}^3 - \lambda^5{}_3{}^1\,\lambda_{51}{}^3\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-2}{\sqrt{3}} - 1\cdot 1 - i\cdot(-i)\right] = -\frac{2}{3}.$$

Konkretni QCD računi

Kvark-kvark interakcija

- Stoga: $f_c(\bar{\mathbf{3}}|\bar{\mathbf{3}})$, predstavljen $f_c([13]|[13])$, = –⅔ (privlačan!)
  - Slično, $f_c(\bar{\mathbf{3}}|\bar{\mathbf{3}}')$ predstavljen $f_c([12]|[13])$,

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta^1_\gamma\delta^2_\delta-\delta^1_\delta\delta^2_\gamma\right)\left(\lambda^a\right)_\alpha{}^\gamma\left(\lambda_a\right)_\beta{}^\delta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta^\alpha_1\delta^\beta_3-\delta^\beta_1\delta^\alpha_3\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left[\lambda^a{}_1{}^1\,\lambda_{a3}{}^2-\lambda^a{}_3{}^1\,\lambda_{a1}{}^2-\lambda^a{}_1{}^2\,\lambda_{a3}{}^1+\lambda^a{}_3{}^2\,\lambda_{a1}{}^1\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\lambda^a{}_1{}^1\,\lambda_{a3}{}^2-\lambda^a{}_3{}^1\,\lambda_{a1}{}^2\right]=0$$ — ne može!

- $f_c(\mathbf{6}|\mathbf{3}^*)$, predstavljen $f_c((11)|[12])$, = 0
- $f_c(\mathbf{6}|\mathbf{3}^*)$, predstavljen $f_c((33)|[12])$, = 0
- $f_c(\mathbf{6}|\mathbf{3}^*)$, predstavljen $f_c((13)|[13])$, = 0
- $f_c(\mathbf{6}|\mathbf{3}^*)$, predstavljen $f_c((12)|[13])$, = 0

} — ne može!

- $f_c(\mathbf{6}|\mathbf{6})$, predstavljen $f_c((11)|(11))$, = +⅓ (odbojan!)
- $f_c(\mathbf{6}'|\mathbf{6})$, predstavljen $f_c((11)|(33))$, = 0 — ne može!

Konkretni QCD računi

Kvark-kvark interakcija

Barioni moraju da budu $SU(3)_c$-invariante.

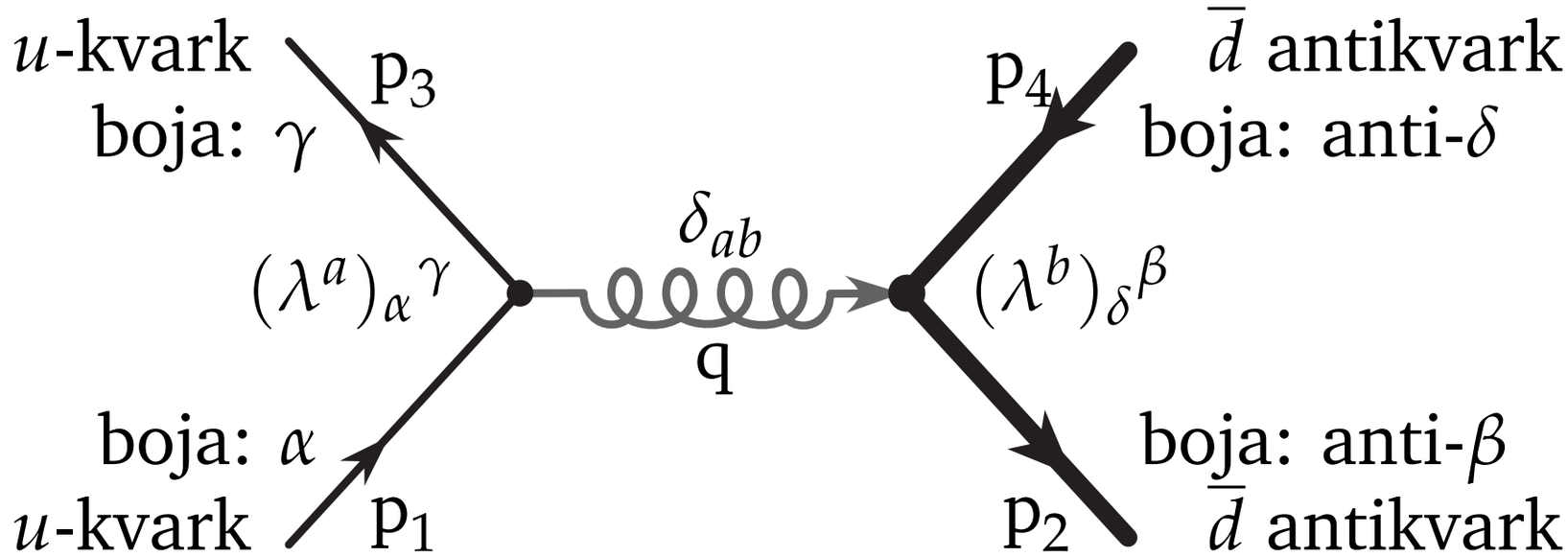
- Rezimirano:
- Kvark-kvark interakcija 1-gluonskom razmenom je
  - ***privlačna*** ako su boje kvarkova antisimetrizovane
  - — i ostaju u istom konkretnom stanju,
  - ***odbojne*** ako su boje kvarkova simetrizovane
  - — i ostaju u istom konkretnom stanju,
  - ***zabranjene*** u svim ostalim slučajevima.
- Interakcija više-gluonskom razmenom prati ovaj format.
- Barione čine tri kvarka.
  - Da bi boje svakog para bile antisimetrizovane,
  - …boje sva tri kvarka moraju da se antisimetrizuju.
  - $(\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3})_A = \mathbf{1}$, t.j. $(t^a\, t^\beta\, t^\gamma)_A \propto \varepsilon^{a\beta\gamma}$, što je $SU(3)$-invarijanta.
  - $\Psi_{\text{barion}} = [\Psi(\text{prostor-vreme})\cdot\chi(\text{spin})\cdot\chi(\text{ukus})]_S \cdot \chi_A(\text{boja})$

U elektrodinamici se istoimena naelektrisanja ***uvek*** odbijaju!

Konkretni QCD računi

Kvark-antikvark interakcija

- 1-gluonska razmena:



- proizvodi amplitudu

$$\mathscr{M}_{\bar{d}+u\to\bar{d}+u} = -\frac{g_c^2}{4q^2}[\overline{u}_3\boldsymbol{\gamma}^\mu u_1][\overline{v}_2\boldsymbol{\gamma}_\mu v_4](\chi_3^\dagger\,\boldsymbol{\lambda}^a\,\chi_1)(\chi_2^\dagger\,\boldsymbol{\lambda}_a\,\chi_4),$$

- sa faktorom boje

$$f_c(3,\overline{4}|1,\overline{2}) = \tfrac{1}{4}(\chi_3^\dagger\boldsymbol{\lambda}^a\chi_1)(\chi_2^\dagger\boldsymbol{\lambda}_a\chi_4)$$

Konkretni QCD računi

Kvark-antikvark interakcija

- Ulazni i izlazni (anti-)kvarkovi sada mogu da imaju boje u
  - ($SU(3)_c$-invariantnom) stanju singleta boje $(\chi_1\chi_2^\dagger)^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta \mathring{\boldsymbol{\chi}}$
  - ili u stanju (ermitske matrice bez traga) za oktet boje:

$$\{\chi_{12}{}^\alpha{}_\beta = \sqrt{1+\tfrac{1}{2}\delta^\alpha_\beta}(\chi_1^\alpha\chi_{2\beta}^\dagger - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\delta^\alpha_\beta\mathring{\boldsymbol{\chi}}),\ \ \alpha,\beta = c,\check{z},p = 1,2,3\},$$

$$= \Big\{\sqrt{\tfrac{3}{2}}(\delta^\alpha_1\delta^1_\beta - \mathring{\boldsymbol{\chi}}),\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}(\delta^\alpha_2\delta^2_\beta - \mathring{\boldsymbol{\chi}}),\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}(\delta^\alpha_3\delta^3_\beta - \mathring{\boldsymbol{\chi}}),$$

$$(\delta^\alpha_1\delta^2_\beta),\ (\delta^\alpha_1\delta^3_\beta),\ (\delta^\alpha_2\delta^1_\beta),\ (\delta^\alpha_2\delta^3_\beta),\ (\delta^\alpha_3\delta^1_\beta),\ (\delta^\alpha_3\delta^2_\beta)\Big\},$$

- Simbolično:
  - $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}^* = \mathbf{1}\oplus\mathbf{8}$
  - $t^\alpha\otimes\bar{s}_\beta = \underbrace{[\tfrac{1}{3}\delta^a{}_\beta(t^\gamma\bar{s}_\gamma)]}_{\text{trag}} + \underbrace{[t^\alpha\bar{s}_\beta - \tfrac{1}{3}\delta^a{}_\beta(t^\gamma\bar{s}_\gamma)]}_{\text{bez traga}}$

kao kvadrupolni moment u elektrodinamici

Konkretni QCD računi

Kvark-antikvark interakcija

- Pošto je naboj boje antikvarka ***suprotan*** od naboja boje odgovarajućeg kvarka,
- …1-gluonska razmena proizvodi potencijal

$$V_{q\bar{q}}(r) = -f_c \frac{\alpha_c \hbar c}{r},$$

- Treba izračunati $f_c(3,\bar{4}\,|\,1,\bar{2})$ za:
  - $f_c(\mathbf{8}|\mathbf{8})$, predstavljen $f_c({}^1{}_3|{}^1{}_3)$,
  - $f_c(\mathbf{8}'|\mathbf{8})$, predstavljen $f_c({}^3{}_1|{}^1{}_3)$,
  - $f_c(\mathbf{8}|\mathbf{1})$, predstavljen $f_c({}^1{}_3|\mathbf{1})$,
  - $f_c(\mathbf{1}|\mathbf{1})$, predstavljen $f_c(\mathbf{1}|\mathbf{1})$.
- Računamo opet:

$$\frac{1}{4}\,(\delta^1_\gamma \delta^\delta_3)\,(\lambda^a)_\alpha{}^\gamma\,(\lambda_a)_\delta{}^\beta\,(\delta^\alpha_1 \delta^3_\beta),$$

$$= \frac{1}{4}\,\lambda^a{}_1{}^1\,\lambda_{a3}{}^3 = \frac{1}{4}\,\lambda^8{}_1{}^1\,\lambda_{83}{}^3 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{-2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{6},$$

Konkretni QCD računi

Kvark-antikvark interakcija

- Dobijemo:
  - $f_c(\mathbf{8}|\mathbf{8})$, predstavljen $f_c({}^1{}_3|{}^1{}_3)$, $= -1/6$ — odbojan!
  - $f_c(\mathbf{8}'|\mathbf{8})$, predstavljen $f_c({}^3{}_1|{}^1{}_3)$, $= 0$
  - $f_c(\mathbf{8}|\mathbf{1})$, predstavljen $f_c({}^1{}_3|1)$, $= 0$
  - $f_c(\mathbf{1}|\mathbf{1})$, predstavljen $f_c(1|1)$:

$$\boxed{V_{q\bar{q}}(r) = -f_c \frac{\alpha_c \hbar c}{r},}$$

$$\frac{1}{4}\,(\chi^\dagger_{3\gamma}\,\chi^\delta_4)_{\mathbf{1}}\,(\lambda^a)_\alpha{}^\gamma\,(\lambda_a)_\delta{}^\beta\,(\chi^\alpha_1\,\chi^\dagger_{2\beta})_{\mathbf{1}}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{3}}(\delta^1_\gamma\delta^\delta_1 + \delta^2_\gamma\delta^\delta_2 + \delta^3_\gamma\delta^\delta_3)\,(\lambda^a)_\alpha{}^\gamma\,(\lambda_a)_\delta{}^\beta\,\frac{1}{\sqrt{3}}(\delta^\alpha_1\delta^1_\beta + \delta^\alpha_2\delta^2_\beta + \delta^\alpha_3\delta^3_\beta),$$

$$= \frac{1}{12}\,\lambda^a{}_\alpha{}^\gamma\,\lambda_{a\gamma}{}^\alpha = \frac{1}{12}\,\delta_{ab}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\lambda}^a\,\boldsymbol{\lambda}^b) = \frac{1}{12}\,\delta_{ab}\,2\delta^{ab} = \frac{1}{6}\,8 = \frac{4}{3}$$

privlačan!

- Kvark-antikvark potencijal od 1-gluonske razmene je:
  - ***privlačan*** za ulazna i izlazna stanja singleta boje,
  - ***odbojan*** za ulazna i izlazna stanja (istih!) okteta boje,
  - ***zabranjen*** inače.

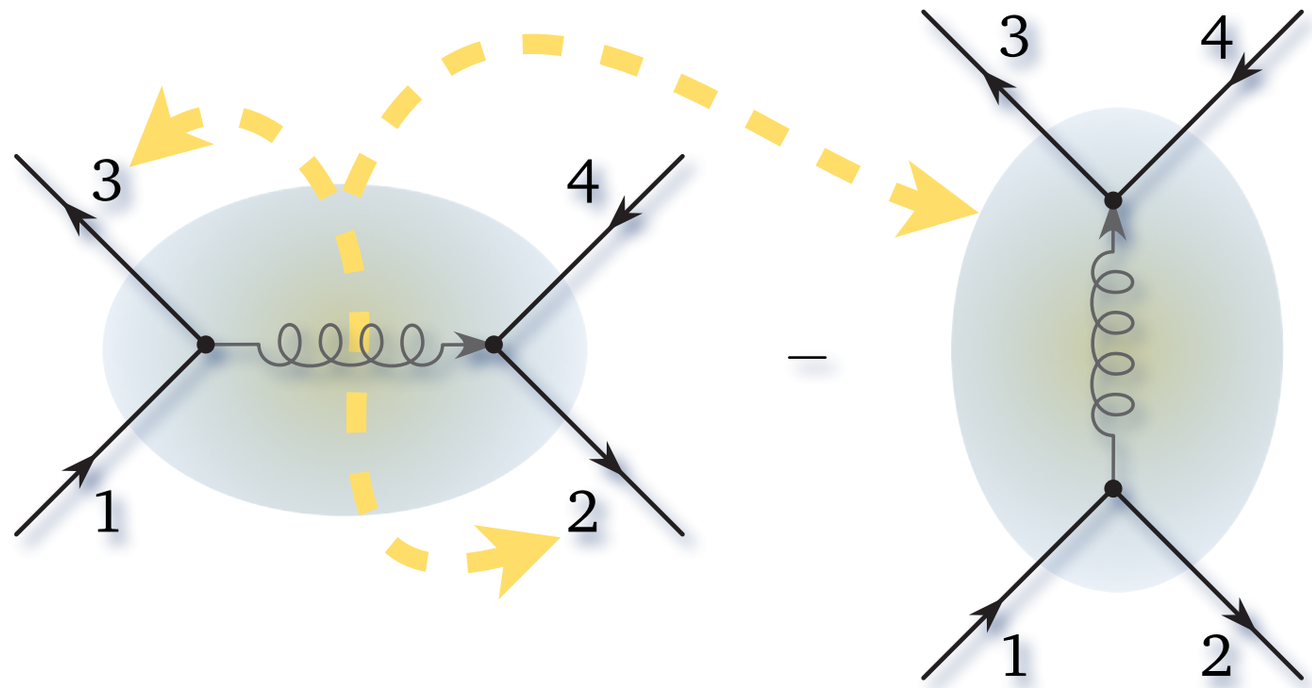
Mezoni moraju da budu $SU(3)_c$-invariante.

Konkretni QCD računi

Kvark-antikvark interakcija

- Da li (virtuelna) anihilacija + re-kreacija doprinosi?

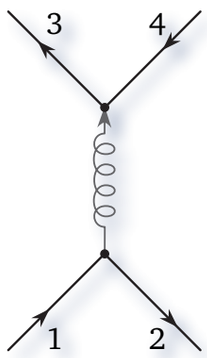
$\mathscr{M}_{u+\bar{u}\to u+\bar{u}} =$



$$\mathscr{M}_{u+\bar{u}\to u+\bar{u}} = -\frac{g_c^2}{4(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_3)^2}[\overline{u}_3\boldsymbol{\gamma}^\mu u_1][\overline{v}_2\boldsymbol{\gamma}_\mu v_4](\chi_3^\dagger\boldsymbol{\lambda}^a\chi_1)(\chi_2^\dagger\boldsymbol{\lambda}_a\chi_4)$$
$$+\frac{g_c^2}{4(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2)^2}[\overline{v}_2\boldsymbol{\gamma}^\mu u_1][\overline{u}_3\boldsymbol{\gamma}_\mu v_4](\chi_2^\dagger\boldsymbol{\lambda}^a\chi_1)(\chi_3^\dagger\boldsymbol{\lambda}_a\chi_4),$$

Konkretni QCD računi

Kvark-antikvark interakcija



- Da li (virtuelna) anihilacija + re-kreacija doprinosi?
- Faktori boje su sada:
  - $f_c(\mathbf{8}|\mathbf{8})$:

$$\left\{\tfrac{1}{4}\,(\chi^\dagger_{3\gamma}\,\chi^\delta_4)_{\mathbf{8}}\,(\lambda^a)_\alpha{}^\beta\,(\lambda_a)_\delta{}^\gamma\,(\chi^\alpha_1\,\chi^\dagger_{2\beta})_{\mathbf{8}}\right\} \supset \tfrac{1}{4}\,(\delta^1_\gamma\delta^\delta_3)\,(\lambda^a)_\alpha{}^\beta\,(\lambda_a)_\delta{}^\gamma\,(\delta^\alpha_1\delta^3_\beta),$$

$$= \tfrac{1}{4}\,\lambda^a{}_1{}^3\,\lambda_{a3}{}^1 = \tfrac{1}{4}\,(\lambda^4{}_1{}^3\,\lambda_{43}{}^1 + \lambda^5{}_1{}^3\,\lambda_{53}{}^1) = \tfrac{1}{4}\,(1{\cdot}1 + (-i){\cdot}(i)) = \tfrac{1}{2},$$

  - $f_c(\mathbf{8}'|\mathbf{8})$:

$$\left\{\tfrac{1}{4}\,(\chi^\dagger_{3\gamma}\,\chi^\delta_4)_{\mathbf{8}'}\,(\lambda^a)_\alpha{}^\beta\,(\lambda_a)_\delta{}^\gamma\,(\chi^\alpha_1\,\chi^\dagger_{2\beta})_{\mathbf{8}}\right\} \supset \tfrac{1}{4}\,(\delta^3_\gamma\delta^\delta_1)\,(\lambda^a)_\alpha{}^\beta\,(\lambda_a)_\delta{}^\gamma\,(\delta^\alpha_1\delta^3_\beta),$$

$$= \tfrac{1}{4}\,\lambda^a{}_1{}^3\,\lambda_{a1}{}^3 = \tfrac{1}{4}(\lambda^4{}_1{}^3\,\lambda_{41}{}^3 + \lambda^5{}_1{}^3\,\lambda_{51}{}^3) = \tfrac{1}{4}\,(1{\cdot}1 + (-i){\cdot}(-i)) = 0,$$

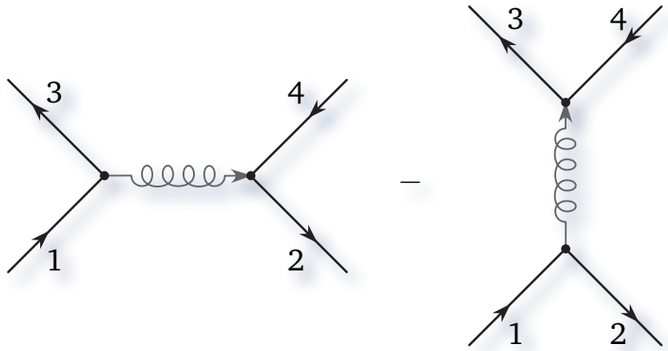
  - $f_c(\mathbf{1}|\mathbf{1})$:

$$\tfrac{1}{4}\,(\chi^\dagger_{3\gamma}\,\chi^\delta_4)_{\mathbf{1}}\,(\lambda^a)_\alpha{}^\beta\,(\lambda_a)_\delta{}^\gamma\,(\chi^\alpha_1\,\chi^\dagger_{2\beta})_{\mathbf{1}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\delta^1_\gamma\delta^\delta_1 + \delta^2_\gamma\delta^\delta_2 + \delta^3_\gamma\delta^\delta_3)\,(\lambda^a)_\alpha{}^\beta\,(\lambda_a)_\delta{}^\gamma\,\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\delta^\alpha_1\delta^1_\beta + \delta^\alpha_2\delta^2_\beta + \delta^\alpha_3\delta^3_\beta),$$

$$= \tfrac{1}{12}\,\lambda^a{}_\alpha{}^\alpha\,\lambda_{a\gamma}{}^\gamma = \tfrac{1}{12}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\lambda}^a)\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\lambda}_a) = 0,$$

Konkretni QCD računi



Kvark-antikvark interakcija

- Da li (virtuelna) anihilacija + re-kreacija doprinosi?
- Algebarska suma (u stvari razlika) ove dve amplitude je

$$\mathscr{M}_{u+\bar{u}\to u+\bar{u}} = -\frac{g_c^2}{(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_3)^2}\left\{\begin{array}{c}-\frac{1}{6}\\ +\frac{4}{3}\end{array}\right\}[\overline{u}_3\boldsymbol{\gamma}^\mu u_1][\overline{v}_2\boldsymbol{\gamma}_\mu v_4]$$

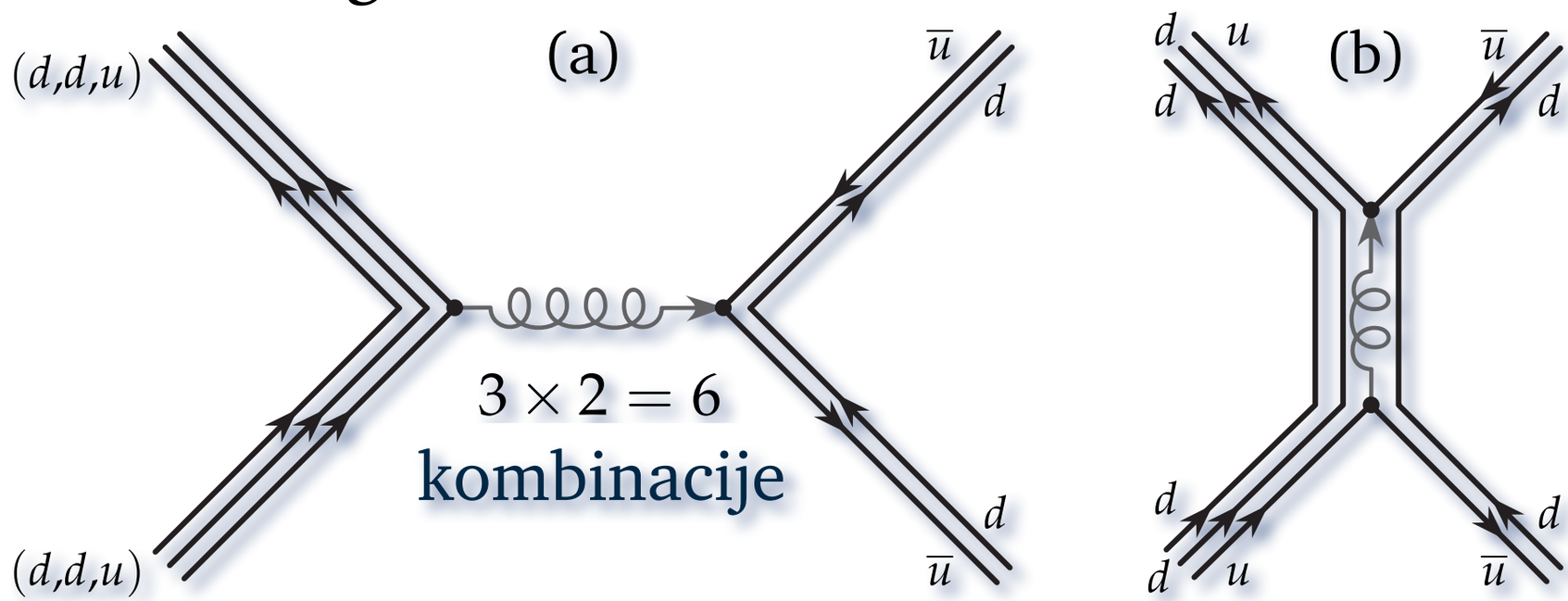
$$+\frac{g_c^2}{(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2)^2}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\ 0\end{array}\right\}[\overline{v}_2\boldsymbol{\gamma}^\mu u_1][\overline{u}_3\boldsymbol{\gamma}_\mu v_4], \text{ ako } \left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{\chi}_{12}\subset\mathbf{8},\\ \boldsymbol{\chi}_{12}=\mathbf{1}.\end{array}\right.$$

- $SU(3)_c$-invariantan kvark-antikvark par ne može da se pretvori u jedan gluon —ni virtuelno— nema $SU(3)_c$-invariantnih gluona.
- Slično, ($SU(3)_c$-invariantni) hadroni niti emituju niti apsorbuju jedan gluon—zbog očuvanja boje.
- Svim hadron-hadronskim interakcijama posreduju $SU(3)_c$-invariantni objekti: ($n\geq 2$)-gluona i/ili kvark-antikvark parovi.

Konkretni QCD računi

Kvark-antikvark interakcija

- Stoga, u $n^0 + \pi^- \to n^0 + \pi^-$ rasejanju, 1-gluonska razmena bi mogla da se dogodi:

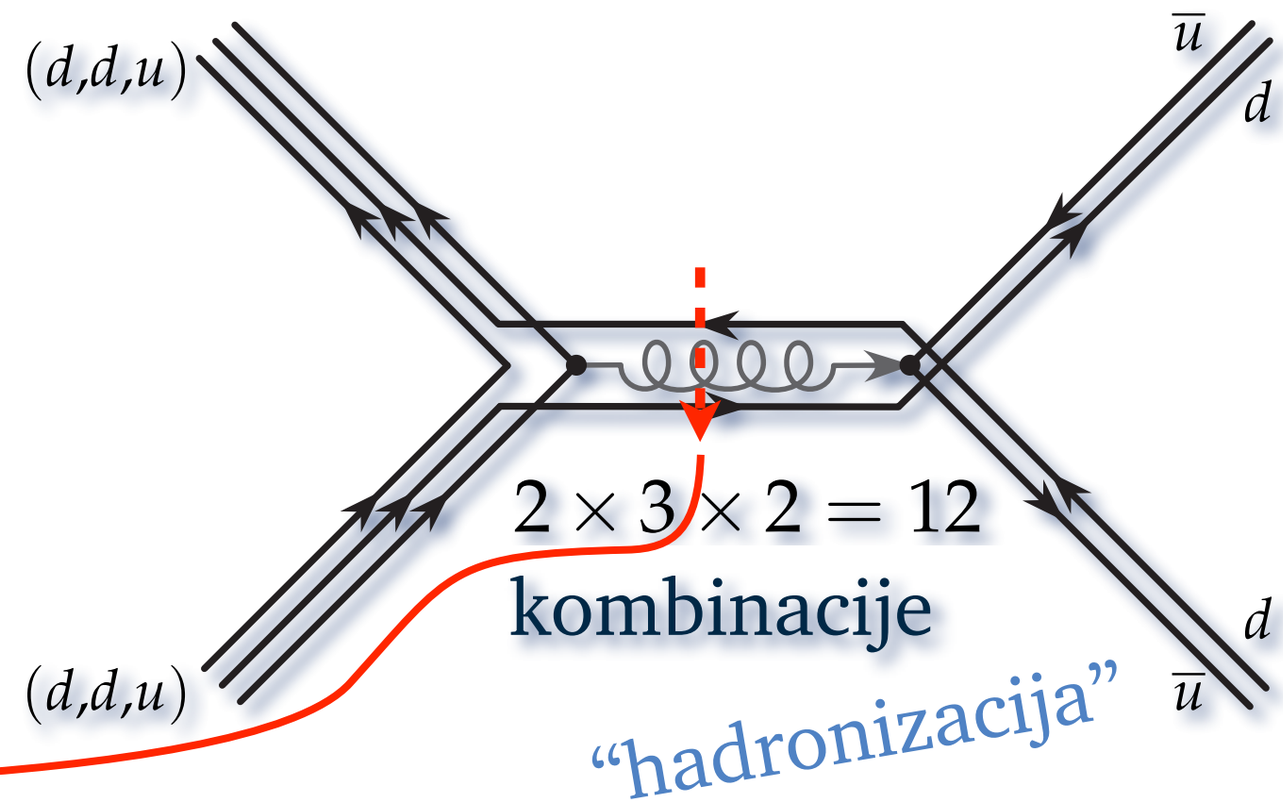


- …osim što dva $SU(3)_c$-invariantna hadrona ne mogu da razmene $SU(3)_c$-***varijantni*** gluon a ostanu $SU(3)_c$-invariantni.
- Stoga, procesi ilustrovani u (a) moraju dodatno da uključe i razmenu makar još jednog gluona, ili *d*-kvarka…

Konkretni QCD računi

Kvark-antikvark interakcija

- Stoga, u $n^0 + \pi^- \to n^0 + \pi^-$ rasejanju, 1-gluonska razmena mora da ima

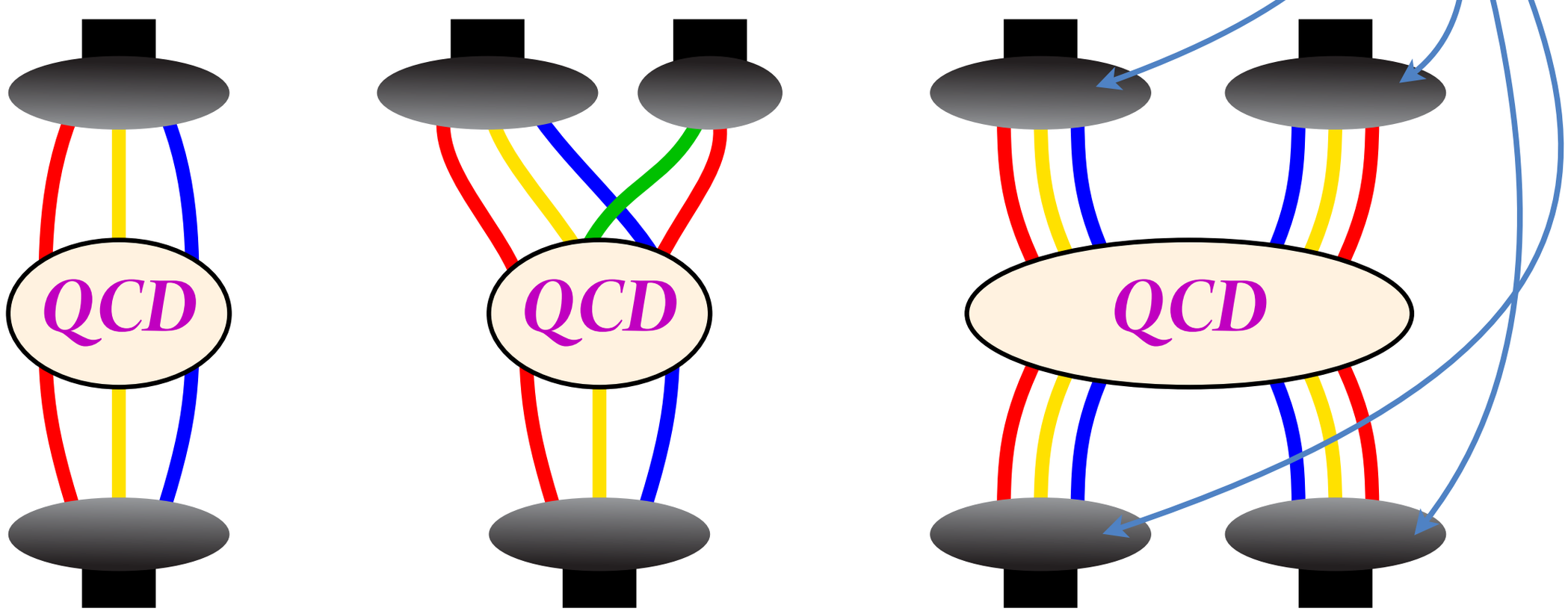


- …koji je još uvek $O(g_c^{\,2})$, ali je bitno zakomplikovan razmenom d-kvarka. Posredna čestica efektivno postane hadron (π^0, ili neka njegova orbitalna ekscitacija, kao ρ^0 ili…).

SU(3)c formalizam

Zaključci

- Uopšte uzev,
- QCD interakcije moraju da teku tako da
- …ne menjaju hromo-invarijantnost hadrona učesnika
- …ni bilo kojeg drugog (realnog) posrednog stanja.



SU(3)c formalizam

Zaključci

- QCD interakcije favorizuju antisimetrizaciju boje:
- U barionima, tri kvarka se privlače QCD silom tačno onda kada čine $SU(3)_c$-invarijantno stanje.
  - Tj. faktor boje mora da bude totalno antisimetričan.
- U mezonima, kvark-antikvark par se privlači QCD silom tačno onda kada čine $SU(3)_c$-invariantno stanje.
- Dva $SU(3)_c$-invariantna hadrona ne mogu da razmene $SU(3)_c$-***varijantan*** gluon a ostanu $SU(3)_c$-invariantni.
- Stoga dva hadrona mogu da interaguju samo razmenom
  - $SU(3)_c$-invariantnih objekata, sazdanih od 2 ili više
  - …gluona i/ili kvark-antikvark para.
  - Hadron-hadronska sila je stoga (van der Waals-ovski) “ostatak”.

SU(3)c formalizam

Zaključci

- 1-gluonska razmena daje indikativnu kvalitativnu procenu (antisimetrizacija $\Leftrightarrow$ privlačenje).
- Indikativna jeste, ali nije dovoljna kao dokaz:
  - ni za ***zarobljavanje*** (kvarkovi se ne razdvajaju $\geq 10^{-15}$m)
  - ni za ($\ll 10^{-15}$m) ***asimptotsku slobodu***
- Zarobljavanje je odlika za velike ($\geq 10^{-15}$ m) razdaljine
  - tipa Coulomb-ovog (statičnog) polja u elektromagnetizmu
  - …formiranog kao kondenzata ***beskonačno mnogo kvanta***
  - …što je ***suštinski neperturbativan*** fenomen
- Asimptotska sloboda je perturbativan rezultat
  - 1973, David Gross i Frank Wilczek, i nezavisno David Politzer
  - …godinu dana pre “novembarske (1974) revolucije.”

Hvala na pažnji!

Tristan Hübsch

Department of Physics and Astronomy, Howard University, Washington DC
Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD
Department of Physics, Faculty of Natural Sciences, Novi Sad, Serbia
https://tristan.nfshost.com/